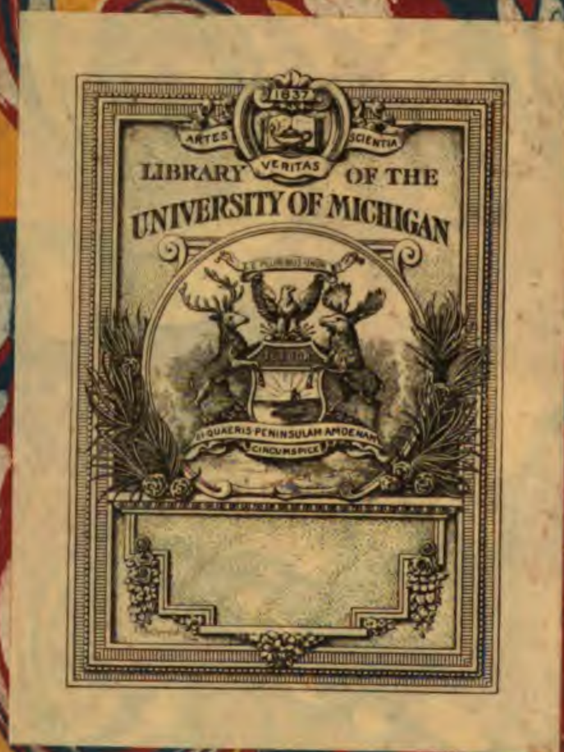

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

VOL. I.

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS USU

IN ANALYSI FINITORUM

AC

DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE

LEONARDO EULERO

ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.

TICINI
IN TYPOGRAPHEO PETRI GALEATII
Superiorum permissu.
1787.

IOSEPHO . DE . WILZECK

S. R. I. COMITI

IOSEPHI . II . P . F . AUG .

A . CUBICULO . ET . PENITIORIBUS . CONSILIIS

REI . TABELLARIÆ . ET . CURSORIÆ

IN . ITALIA . PRÆFECTO

PLENA . CUM . POTESTATE

DE . REBUS . IMPERII . PER . ITALIAM . LEGATO

ET . IN . AUSTRIACA . INSUBRIA

ADMINISTRO

CONSTANTI . FORTI . INTEGERRIMO

DE . INSUBRICIS . LITTERIS

DEQUE . ARCHIGYMNASIO . TICINENSI

OPTIME . MERITO

MUSISQUE . OMNIBUS . ET . GRATIIS . CARISSIMO

FERDINANDUS . SPERONIUS

EX . MINOR . CONV . FAMILIA

EULERIANUM . OPUS . A . SE . EDITUM

ET . IUVENTUTIS . BONO . PARATUM

L. M. Q. D. D. D.

EDITOR LECTORI.

*A*Bsolutissimum Differentialis Calculi *Opus*, *quod trigintaduobus abhinc annis Geometrarum princeps* LEONARDUS EULERUS *Berolinensibus typis*, *& Petropolitanae Academiae sumptibus vulgaverat*, *distractis iam cunctis ferme exemplaribus*, *nec nisi ingenti pretio comparandis*, *novam iampridem editionem postulabat*. *Sed ingratum hunc molestumque laborem ut ipse susciperem*, *a me nunquam impetrare potuissem*, *nisi votis & flagitationibus illorum*, *qui diutius hoc opere carere non poterant*, *accessissent doctorum Virorum invitationes*, *cohortationesque amicorum*, *qui rem Geometris gratam*, *Iuventuti utilissimam augurantes*, *me diu haesitantem & ancipitem stimulis additis pepulerunt*.

Ad rem itaque aggressus Eulerianum Opus a capite ad calcem quam potui diligentissime legi & perlustravi, *calculosque omnes analyticos*, *quodque operosius erat ingentes illos numerorum acervos*, *qui passim occurrunt*; *maxima qua potui circumspectione recognovi*. *Mirum dictu est*, *quot quantosque offenderim*

typo-

typographicos errores corruptos numeros vitiatos calculos ambiguos sensus, ut ferre aequo animo haud possim Berolinensis Typographi simulationem dicam an levitatem? qui bina tantum errata, eaque levissima emendanda proposuit: Μέμνησο ἀπιστεῖν. *Correctis typothetarum mendis reliquum erat, ut de pretio ac praestantia huic editioni prae antecedenti comparanda cogitarem, eamque novis quibusdam additamentis locupletarem. Igitur elegans, & grave Auctoris Elogium ab eximio Geometra & Philosopho Marchione* CONDORCETO *exaratum, & in publico Academiae Scientiarum Parisiensis conventu recitatum, sed nondum in eius Academiae Actis publici iuris factum, Operi universo praeposui: tum in operis calce indicem adieci absolutissimum omnium* EULERI *Lucubrationum, cum earum, quae separatim editae iustis voluminibus continentur, tum earum, quae numero prope incredibili in plurium Academiarum Commentariis leguntur, tum denique caeterarum, quae ineditae ad bis centum usque inter eius manuscripta inventae sunt, quaeque Petropolitanae Academiae traditae in eius Commentariis deinceps in lucem emittentur. Tam amplum atque immensum mathematicae eruditionis thesaurum prae oculis habere illumque pro opportunitate consulere res erit procul dubio iunioribus provectioribusque Geometris utilissima, qui ex infini-*

fini-

finita illa rerum tractatarum multitudine quid sibi sumant, quid omittant statim perspicient, & ab iis quaestionibus tractandis abstinebunt, quas cognoverint ab EULERO *inchoatas simul & perfectas, neque tanquam novum proponent quod ipse occupaverit; quod caeteroquin evenire facile posset, quum nullum ferme sit in universo Disciplinarum Mathematicarum ambitu argumentum paullo elegantius, quod Geometra iste Briaraeus vel non delibaverit, vel non absolverit.*

Postremo operae pretium duxi brevibus quibusdam annotationibus locum unum vel alterum Euleriani Operis illustrare, eaque perpauca huc derivare, quae postmodum ab Auctore ipso, vel a Geometris aliis ad Differentialis Calculi amplificationem inventa sunt; perpauca inquam, nam Euleriano scripto multa addere hominis esset vel incredibilem huius Geometrae foecunditatem ignorantis, vel Phidiae simulacrum, aut Apellis tabulam emendare sibi arrogantis

Superesset nunc, ut grata animi significatione declararem quid ipse debeam Viro celeberrimo & polyhistori Praeceptori nuper meo GREGORIO FONTANAE *in Regio Ticinensi Archigymnasio sublimioris Matheseos Professori, quo suasore & auspice rem omnem molitus sum; sed verecundiae hominis modestissimi, quem vel nominare omnino prohibeor, parcendum est.*

ÉLOGE
DE M. EULER

Prononcé à la rentrée de l'Académie royale des ſciences le 6 Février 1785

Par

M. LE MARQ. DE CONDORCET

Sécretaire perpétuel de l'Académie des ſciences, de l'Inſtitut de Bologne des Académies de Petersbourg, de Turin &c. &c. &c.

LÉONARD EULER, Directeur de la claſſe de mathématique dans l'Académie de Petersbourg, & auparavant dans celle de Berlin, de la Société royale de Londres, des Académies de Turin, de Lisbonne & de Basle, aſſocié étranger de celle des Sciences, naquit à Basle le 15 Avril 1707, de PAUL EULER & de MARGUERITTE BRUCKER.

Son pere, devenu en 1708 paſteur du village de Riechen près de Basle, fût ſon premier inſtituteur, & eut bientôt le plaiſir de voir les eſpérances des talens & de la gloire d'un fils, ſi douces pour un cœur paternel, naître & ſe fortifier ſous ſes yeux & par ſes ſoins.

Il avoit étudié les mathématiques ſous JAQUES BERNOULLI. On ſait que cet homme illuſtre joignoit à un grand génie

pour les ſciences une philoſophie profonde, qui n' accompagne pas toujours ce génie, mais qui ſert à lui donner plus d'étendue & à le rendre plus utile. Dans ſes leçons, il faiſoit ſentir à ſes diſciples que la géométrie n' eſt pas une ſcience iſolée, & la leur préſentoit comme la baſe & la clef de toutes les connoiſſances humaines; comme la ſcience où l' on peut le mieux obſerver la marche de l' eſprit; celle dont la culture exerce le plus utilement nos facultés, puiſqu' elle donne à l' entendement de la force & de la juſteſſe à la fois; enfin comme une étude également précieuſe par le nombre ou la variété de ſes applications & par l' avantage de faire contracter l' habitude d' une méthode de raiſonner, qui peut s' employer enſuite à la recherche des vérités de tous les genres, & nous guider dans la conduite de la vie.

PAUL EULER, pénétré des principes de ſon maître, enſeigna les élémens des mathématiques à ſon fils, quoiqu' il le deſtinât à l' étude de la théologie; & lorſque le jeune EULER fut envoyé à l' univerſité de Basle, il ſe trouva digne de recevoir les leçons de JEAN BERNOULLI. Sa facilité, ſon application, ſes diſpoſitions heureuſes, lui mériterent bientôt l' amitié de DANIEL & de NICOLAS BERNOULLI, diſciples & déja rivaux de leur pere. Il eut même le bonheur d' obtenir celle du ſévere JEAN BERNOULLI, qui voulut bien lui donner, une fois par ſemaine, une leçon particuliere, deſtinée à éclaircir les difficultés qui ſe préſentoient à lui

dans

dans le cours de ses lectures & de ses travaux. Les autres jours etoient employés par M. EULER, à se metre en état de profiter de cette faveur signalée.

Cette méthode excellente empêchoit son génie naissant de s'épuiser contre des obstacles invincibles, de s'égarer dans les routes nouvelles qu'il cherchoit à s'ouvrir; elle guidoit & secondoit ses efforts: mais en même tems elle l'obligeoit de déployer toutes ses forces, qu'il augmentoit encore par un exercice proportionné à son âge & à l'étendue de ses connoissances.

Il ne jouit pas longtems de cet avantage; & à peine eut-il obtenu le titre de maître-és-arts, que son perre, qui le destinoit à lui succéder, l'obligea de quitter les mathématiques, pour la théologie. Heureusement, cette rigueur ne fut que passagere. On lui fit aisément entendere que son fils étoit né pour remplacer dans l'Europe JEAN BERNOULLI, & non pour être pasteur de Riechen.

Un ouvrage que M. EULER fit à 19 ans sur la mâture des vaisseaux, sujet proposé par l'Académie des Sciences, obtint un accessit en 1727; honneur d'autant plus grand, que le jeune habitant des Alpes n'avoit pu être aidé par aucune connoissance pratique, & qu'il n'avoit été vaincu que par M. BOUGUER, Géomêtre habile, alors dans la force de son talent, & déja depuis dix ans Professeur d'hydrographie dans une ville maritime.

M. EULER concourroit en même tems pour une chaire dans l'Université de Basle; mais c'est le sort qui prononce entre les savans admis à disputer ces places, & il ne fut pas favorable; nous ne disons point à M. EULER, mais à sa patrie, qui le perdit peu de jours aprés & pour toujours. Deux ans auparavant, NICOLAS & DANIEL BERNOULLI avoient été appellés en Russie. M. EULER, qui les vit partir avec regret, obtint d'eux la promesse de chercher à lui procurer le même honneur qu'il ambitionnoit de partager, & il ne faut pas en être surpris. La splendeur de la capitale d'un grand empire, cet éclat qui, se repandant sur les travaux dont elle est le théatre & sur les hommes qui l'habitent, semble ajouter à leur gloire, peuvent aisément seduire la jeunesse & frapper le citoyen libre, mais obscur & pauvre d'une petite république. MM. BERNOULLI furent fideles a leur parole & se donnerent, pour avoir auprés d'eux un concourrent si redoutable, autant de soins que des hommes ordinaires en auroient pû prendre pour écarter leurs rivaux.

Le voyage de M. EULER fut entrepris sous de tristes auspices. Il apprit bientôt que NICOLAS BERNOULLI avoit déja été victime de la rigueur du climat. Et le jour même où il entra sur les terres de l'empire Russe fut celui de la mort de CATHERINE I., événement qui parût d'abord menacer d'une dissolution prochaine l'Académie, dont cette Princesse, fidele aux vues de son Epoux, venoit d'achever

la

la fondation. M. EULER, éloigné de sa patrie, n'ayant point, comme M. DANIEL BERNOULLI, à y rapporter un nom célebre & respecté, prit la résolution d'entrer dans la marine russe. Un des Amiraux de PIERRE I. lui avoit déja promis une place, lorsque, heureusement pour la géométrie, l'orage élevé contre les sciences se dissipa. M. EULER obtint le titre de Professeur, succéda en 1733 à M. DANIEL BERNOULLI, lorsque cet homme illustre se retira dans son pays; & la même année il épousa M.[lle] GSELL, sa compatriote, fille d'un peintre que PIERRE I. avoit ramené en Russie, au retour de son premier voyage. Dés-lors pour nous servir de l'expression de BACON, M. EULER sentit qu'il avoit donné des otages à la fortune, & que le pays, où il pouvoit espérer de former un établissement pour sa famille, étoit devenu pour lui une patrie nécessaire. Né chez une Nation où tous les gouvernemens conservent au moins l'apparence & le langage des constitutions républicaines, où, malgré des distinctions plus réelles que celles qui séparent les premiers esclaves d'un despote, du dernier de ses sujets, on a soigneusement gardé toutes les formes de l'égalité, où le respect qu'on doit aux loix s'étend jusqu'aux usages les plus indifférens, pourvu que l'antiquité, où l'opinion populaire, les ait consacrés; M. EULER se trouvoit transporté dans un pays où le Prince exerce une autorité sans bornes, où la loi la plus sacrée des gouvernemens absolus, celle qui règle la succession à l'empire, étoit

alors

alors incertaine & méprisée, où des chefs, esclaves du souverain, regnoient despotiquement sur un peuple esclave; & c'étoit dans le moment où cet empire, gouverné par un étranger ambitieux, défiant & cruel, gémissoit sous la tyrannie de BIREN, & offroit un spectacle aussi effrayant qu' instructif aux savans, qui étoient venus chercher dans son sein la gloire, la fortune & la liberté de goûter en paix les douceurs de l' étude.

On sent tout ce que dut éprouver l'ame de M. EULER, lié à ce séjour par une chaine qu' il ne pouvoit plus rompre. Peut-etre doit on à cette circonstance de sa vie, cette opiniâtreté pour le travail, dont il prit alors l' habitude & qui devint son unique ressource dans une capitale où l' on ne trovoit plus que des ennemis, ou des satellites du ministre, occupés de flatter ses soupçons, ou de s'y dérober. Cette impression fut si forte sur M. EULER, qu' il la conservoit encore, lorsqu' en 1741, l'année d' après la chûte de BIREN, dont la tyrannie fit place à un gouvernement plus modéré & plus humain, il quitta Petersbourg pour se rendre a Berlin, où le Roi de Prusse l'avoit appellé. Il fut présenté à la Reine-mere. Cette Princesse se plaisoit dans la conversation des hommes éclairés, & elle les accueilloit avec cette familiarité noble, qui annonce dans les princes le sentiment d'une grandeur personelle, indépendante de leurs titres, & qui est devenue un des caracteres de cette Famille auguste. Cependant

dant la Reine de Prusse ne put obtenir de M. EULER que des monosyllabes. Elle lui reprocha cette timidité, cet embarras, qu'elle croyoit ne pas mériter d'inspirer. Pourquoi ne voulez-vous donc pas me parler, lui dit-elle? Madame, répondit-il, parceque je viens d'un pays où, quand on parle, on est pendu.

Parvenu au moment de rendre compte des travaux immenses de M. EULER, j'ai senti l'impossibilité d'en suivre les détails, de faire connoitre cette foule de découvertes, de méthodes nouvelles, de vues ingénieuses répandues dans plus de trente ourages publiés à part, & dans prés de sept-cens mémoires, dont environ deux-cens déposés à l'Académie de Petersbourg avant sa mort, sont destinés à enrichir successivement la collection qu'elle publie.

Mais un caractere particulier m'a semblé le distinguer des hommes illustres, qui, en suivant la même carriere, ont obtenu une gloire que la sienne n'a pas éclipsée: c'est d'avoir embrassé les sciences mathématiques dans leur universalité, d'en avoir successivement perfectionné les différentes parties, &, en les enrichissant toutes par des découvertes importantes, d'avoir produit une révolution utile dans la maniere de les traiter. J'ai donc cru qu'en formant un tableau méthodique des différentes branches de ces sciences, en marquant pour chacune les progrès, les changemens heureux, qu'elle doit au génie de M. EULER, j'aurois, du moins au-

tant

tant que mes forces me le permettent, donné une idée plus juste de cet homme célebre, qui, par la reunion de tant de qualités extraordinaires, a été, pour ainsi dire, un phénomêne, dont l'histoire des sciences ne nous avoit encore offert aucun exemple.

L'Algébre n'avoit été pendant longtems qu'une science très-bornée. Cette maniere de ne considérer l'idée de la grandeur que dans le dernier dégrê d'abstraction, où l'esprit humain puisse atteindre, la rigueur avec la quelle on sépare de cette idée tout ce qui, en occupant l'imagination, pourroit donner quelqu'appui, ou quelque repos à l'intelligence; enfin l'extrême généralité des signes que cette science emploit, la rendent en quelque sorte étrangere à notre nature, trop éloignée de nos conceptions communes, pour que l'esprit humain pût aisément s'y plaire & en acquérir facilement l'habitude. La marche même des méthodes algébriques rebutoit encore les hommes les plus propres à ces meditations. Pour peu que l'objet qu'on poursuit soit compliqué, elles forcent de l'oublier totalement, pour ne songer qu'à leurs formules; la route qu'on suit est assurée, mais le but où l'on veut arriver, le point d'où l'on est parti, disparoissent également aux regards du Géomêtre; & il a fallu longtems du courage pour oser perdre la terre de vue & s'exposer sur la foi d'une science nouvelle. Aussi, en jettant les yeux sur les ouvrages des grands Géomêtres du siecle dernier, de ceux mê-

même, aux quels l'algebre doit les découvertes les plus importantes, on verra combien peu ils étoient accoûtumés à manier ce même instrument qu'ils ont tant perfectionné, & l'on ne pourra s'empêcher de regarder comme l'ouvrage de M. EULER, la révolution, qui a rendu l'analyse algébrique une méthode lumineuse, universelle, applicable à tout & même facile.

Aprés avoir donné sur la forme des racines des équations algébriques, sur leur solution générale, sur l'élimination, plusieurs théories nouvelles & des vues ingénieuses ou profondes, M. EULER porta ses recherches sur le calcul des quantités transcendantes. LEIBNITZ & les deux BERNOULLI se partagent la gloire d'avoir introduit dans l'analyse algébrique les fonctions exponentielles & logarithmiques. COTES avait donné le moyen de représenter par des sinus ou des cosinus les racines de certaines équations algébriques.

Un usage heureux de ces découvertes conduisit M. EULER à observer les rapports singuliers des quantités exponentielles & logarithmiques avec les transcendantes nées dans le cercle & ensuite à trouver des méthodes au moyen des quelles faisant disparoître de la solution des problémes les termes imaginaires qui s'y seroient présentés & qui auroient embarassé le calcul, quoiqu'on sût qu'ils dussent se détruire, réduisant les formules à une expression plus simple & plus commode, il est parvenu à donner une forme entierement nouvelle à

la partie de l' analyſe, qui s' applique aux queſtions d' aſtronomie & de phyſique. Cette forme a été adoptée par tous les Géomêtres, elle eſt devenue d' un uſage commun, & elle a produit dans cette partie du calcul à peu prés la même révolution, que la découverte des logarithmes avoit produite dans les calculs ordinaires.

Ainſi, à certaines époques, où, après de grands efforts, les ſciences mathématiques ſemblent avoir épuiſé toutes les reſſources de l' eſprit humain & atteindre le terme marqué à leurs progrès, tout-à-coup une nouvelle méthode de calcul vient s' introduire dans ces ſciences & leur donner une face nouvelle. Bientôt on les voit s' enrichir rapidement par la ſolution d' un grand nombre de problêmes importans dont les Géomêtres n' avoint oſé s' occuper, rebutés par la difficulté, & pour ainſi dire, par l' impoſſibilité phyſique de conduire leurs calculs jusqu' à un reſultat réel. Peut-être la juſtice exigeroit-elle de réſerver à celui qui a ſçu introduire ces méthodes & les rendre uſuelles, une portion de la gloire de tous ceux qui les employent avec ſuccès; mais du moins il a ſur leur reconnoiſſance des droits, qu' ils ne pourroient conteſter ſans ingratitude.

L' analyſe des ſéries a occupé M. EULER dans preſque toutes les époques de ſa vie. C' eſt même une des parties de ſes ouvrages, où l' on voit briller le plus cette fineſſe, cette ſagacité, cette variété de moyens & de reſſources, qui le caractériſent.

Les

Les fractions continues, inventées par le Vicomte de BROUNKER, paroissoient persqu'oubliées des Géomêtres. M. EULER en perfectiona la théorie, en multiplia les applications & en fit sentir toute l'importance.

Les recherches, persqu'absolument neuves, sur les séries de produits indéfinis, offrent des ressources nécessaires à la solution d'un grand nombre de questions utiles ou curieuses; & c'est sur-tout en imaginant ainsi de nouvelles formes de séries & en les employant non seulement à des approximations, dont on est si souvent forcé de se contenter, mais aussi à la découverte des vérités absolues & rigoureuses, que M. EULER a sçu aggrandir cette branche de l'analyse, aujourd'hui si vaste, & bornée avant lui à un petit nombre de méthodes & d'applications.

Le calcul intégral, l'instrument le plus fecond de découvertes que jamais les hommes ayent possédé, à changè de face depuis les ouvrages de M. EULER. Il a perfectionné, étendu, simplifié toutes les méthodes employées ou proposées avant lui. On lui doit la solution générale des équations linéaires, premier fondement de ces formules d'approximations si variées & si utiles. Une foulle de méthodes particulieres, fondées sur differens principes, sont répandues dans ses ouvrages & réunies dans son traité du calcul integral. Là, on le voit, par un heureux usage des substitutions, ou rappeller à une méthode connue des équations qui sembloient

s'y refuser, ou réduire aux premieres différentielles des équations d'ordres supérieurs; tantôt, en considerant la forme des intégrales, il en deduit les conditions des équations différentielles, aux quelles elles peuvent satisfaire; & tantôt l'examen de la forme des facteurs, qui rendent une différentielle complette, le conduit à former des classes générales d'équations intégrables. Quelquefois une propriété particuliere, qu'il remarque dans une équation, lui offre un moyen de séparer les indéterminées, qui sembloient devoir y rester confondues. Ailleurs, si une équation où elles sont séparées se dérobe aux méthodes communes, c'est en mêlant ces indéterminées qu'il parvient á connoître l'intégrale.

Au premier coup d'oeil, le choix & la réussite de ces moyens peuvent sembler en quelque sorte appartenir au hazard. Cependant un succés si fréquent & si sur, oblige de reconnoître une autre cause; & il n'est pas toujours impossible de suivre le fil délié, qui a guidé le génie. Si par exemple, on considére la forme des substitutions employées par M. EULER, on découvrira souvent ce qui a pu lui faire prévoir que cette opération produiroit l'effet dont il avoit besoin; & si on examine la forme que dans une de ses plus belles méthodes il suppose aux facteurs d'une équation du second ordre, on verra qu'il s'est arrêté á une de celles qui appartiennent particulierement à cet ordre d'équation. A la verité cette suite d'idées, qui dirige alors un analyste, est

moins

moins une méthode, dont il puiſſe développer la marche, qu'une ſorte d'inſtinct particulier, dont il ſeroit difficile de rendre compte; & ſouvent il aime mieux ne pas faire l'hiſtoire de ſes penſées, que de s'expoſer au ſoupçon d'en avoir donné un roman ingénieux & fait aprés-coup.

M. EULER a obſervé que les équations différentielles ſont ſuſceptibles de ſolutions particulieres qui ne ſont pas compriſes dans la ſolution générale. M. CLAIRAUT a fait la mêmé remarque; mais M. EULER a montré depuis, pourquoi ces intégrales particulieres étoient exclues de la ſolution générale, il eſt le premier qui ſe ſoit occupé de cette théorie, perfectionnée depuis par pluſieurs Géomêtres célebres & dans la quelle le mémoire de M. DE LA GRANGE, ſur la nature de ces intégrales & leur uſage dans la ſolution des problêmes, n'a plus rien laiſſé à deſirer.

Nous citerons encore une partie de ce calcul, qui appartient preſqu'en entier à M. EULER. C'eſt celle où l'on cherche des intégrales particulieres pour une certaine valeur déterminée des inconnues, que renferme l'équation. Cette théorie eſt d'autant plus importante, que ſouvent l'integrale générale fuit abſolument nos recherches, & que dans les problêmes où une valeur approchée de l'intégrale, ne ſuffit pas aux vues qu'on ſe propoſe, la connoiſſance de ces intégrales particulieres peut ſupléer à ce défaut. En effet, on connoit alors, du moins pour certains points, la valeur ri-

gou-

goureuſe; & cette connoiſſance, unie à celle d'une valeur générale approchée, doit ſuffire à preſque tous les beſoins de l'analyſe.

Perſonne n'a fait un uſage plus étendu & plus heureux des méthodes qui donnent la valeur de plus en plus approchée d'une quantité déterminée, par des équations differentielles & dont on a déja une premiere valeur; & il s'eſt également occupé de donner un moyen direct de deduire immédiatement de l'équation même une valeur aſſés voiſine de la vraie, pour que les puiſſances élevées de leur difference puiſſent être négligées; moyen ſans le quel les methodes d'approximation, en uſage parmi les Géomêtres, ne pourroient s'étendre aux équations pour les quelles les obſervations ou des conſidérations particulières ne donnent pas cette premiere valeur, dont ces méthodes ſuppoſent la connoiſſance.

Ce que nous avons dit, ſuffit pour montrer jusqu'à quel point M. EULER avoit approfondi la nature des équations différentielles, la ſource des difficultés qui s'oppoſent a l'intégration, & la maniere de les éluder ou de les vaincre. Son grand ouvrage ſur cet objet eſt non ſeulement un recueil précieux de méthodes neuves & étendues; c'eſt encore une mine féconde de decouvertes, que tout homme né avec quelque talent, ne peut parcourir ſans en rapporter de riches dépouilles; & l'on peut dire de cette partie des travaux de M. EULER, comme de beaucoup d'autres, que les

mé-

méthodes qu' elle renferme ferviront longtems après lui à résoudre des questions importantes & dificiles & que ses ouvrages produiront encore & plus d' une découverte & plus d' une réputation.

Le calcul aux différences finies n' étoit presque connû que par l' ouvrage obscur, mais plein de sagacité, de TAYLOR. M. EULER en fit une branche importante du calcul intégral, lui donna une notation simple & commode, & sçut l' appliquer avec succès à la théorie des suites, à la recherche de leurs sommes ou de l' expression de leurs termes généraux, à celle de la racine des équations déterminées, à la maniere d' avoir, par un calcul facile, la valeur approchée des produits, ou des sommes indéfinies de certains nombres.

C' est à M. D' ALEMBERT qu' appartient réellement la découverte du calcul aux différences partielles, puisque c' est à lui qu' est due la connoissance des fractions arbitraires, qui entrent dans les intégrales. Mais dans les premiers ouvrages de M. D' ALEMBERT, on voyoit plus le résultat du calcul, que le calcul lui-même. C' est à M. EULER que l' on en doit la notation. Il a sçu se le rendre propre en qualque maniere par la profonde théorie qui l' a conduit a resoudre un grand nombre de ces équations; à distinguer les formes des intégrales, pour les différens ordres & pour les différens nombres de variables; à réduire ces équations, lorsqu'elles ont certaines formes, à des intégrations ordinaires; à donner les moyens de rappeller à ces for-

ſormes, par d'heureuſes ſubſtitutions, celles qui s'en éloignent; en un mot, en découvrant dans la nature des équations aux différences partielles pluſieurs de ces propriétés ſingulieres, qui en rendent la théorie générale ſi difficile & ſi piquante, qualités preſqu'inſéparables en géométrie, où le dégré de la difficulté eſt ſi ſouvent la meſure de l'intérêt qu'on prend á une queſtion, de l'honneur qu'on attache à une découverte. L'influence d'une vérité nouvelle ſur la ſcience même, ou ſur quelqu'application importante, eſt le ſeul avantage qui puiſſe balancer ce mérite de la difficulté vaincue chez des hommes, pour qui le plaiſir d'appercevoir une vérité eſt toujours proportionné aux efforts qu'elle leur a coutés.

M. EULER. n' avoit négligé aucune partie de l' analyſe. Il a démontré quelques uns des Théorèmes de Fermat, ſur l' analyſe indéterminée, & en a trouvé pluſieurs autres non moins curiuex, non moins difficiles à découvrir. La marche du Cavalier au jeu d' Echecs, & différens autres problêmes de ſituation, ont auſſi piqué ſa curioſité & exercé ſon génie. Il mêloit aux recherches les plus importantes, ces amuſemens ſouvent plus difficiles, mais preſque inutiles & au progrés même de la ſcience & aux applications tentées juſqu'ici. M. EULER avoit un eſprit trop ſage, pour ne pas ſentir l'inconvénient de ſe livrer longtems à ces recherches purement curieuſes; mais trop étendu en même tems pour ne pas voir que leur inutilité ne devoit être que momentanée, & que le

ſeul

ſeul moyen de la faire ceſſer étoit de chercher à les approfondir & à les généraliſer.

L'Application de l'Algébre à la Géométrie avoit occupé, depuis DESCARTES, preſque tous les Géomêtres du dernier ſiécle. Mais M. EULER à prouvé qu'ils n'avoient pas, à beaucoup près, tout épuiſé. On lui doit de nouvelles recherches ſur le nombre des points qui déterminent une ligne courbe, dont le dégré eſt connu, & ſur celui des interſections des lignes de différens dégrés. On lui doit également l'équation générale des courbes, dont les développées, les ſecondes, les troiſiémes développées, en un mot les développées d'un ordre quelconque, ſont ſemblables à la courbe génératrice; équation remarquable par ſon extrême ſimplicité.

La Théorie générale des ſurfaces courbes étoit peu connue; & M. EULER eſt le premier qui l'ait développée dans un ouvrage élémentaire. Il y ajouta celle des rayons oſculateurs de ces ſurfaces; & il parvint à cette concluſion ſinguliere, que la courbure d'un élément de ſurface eſt déterminée par deux des rayons-oſculateurs des courbes formées par l'interſection de la ſurface & d'un plan qui paſſe par la perpendiculaire au poin donné; que ces rayons ſont le plus grand & le plus petit de tous ceux qui appartiennent à la ſuite des courbes ainſi formées, & qu'enfin ils ſe trouvent toujours dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Il donna de plus une méthode de déterminer les ſurfa-

ces qui peuvent être développées ſur un plan & une théorie des projections géographiques de la ſphere. Ces deux ouvrages renferment une application de calcul des différences partielles à des problêmes géométriques; application qui peut s'étendre à beaucoup de queſtions intéreſſantes, & dont la primiere idée eſt duë à M. EULER.

Ses recherches ſur les courbes, qui, tracées ſur une ſphére, ſont rectifiables algébriquement, & ſur les ſurfaces courbes, dont les parties correſpondantes à des parties d'un plan donné ſont égales entr'elles, l'ont conduit à une nouvelle eſpéce d'analyſe, à la quelle il donne le nom d'analyſe infinitéſimale indeterminée; parceque, comme dans l'analyſe indéterminée ordinaire, les quantités qui reſtent arbitraires ſont aſſujetties à certaines conditions; &, de même que l'analyſe indéterminée a pu ſervir quelque fois á la perfection de l'Algébre, M. EULER regardoit ſa nouvelle analyſe comme une ſcience qui devoit un jour être utile aux progrés du calcul integral.

En effet, ces queſtions iſolées, qui ne tiennent pas au corps méthodique des ſciences mathématiques, qui n'entrent point dans les applications qu'on peut en faire, ne doivent pas être regardées ſeulement comme des moyens d'exercer les forces, ou de faire briller le génie des Géomêtres. Preſque toujours, dans les ſciences, on commence par cultiver ſéparément quelques parties iſolées. A meſure que les découver-

vertes ſucceſſives ſe multiplient, les liaiſons qui uniſſent ces parties ſe laiſſent ſucceſſivement appercevoir; & le plus ſouvent c'eſt aux lumieres qui reſultent de cette réunion que ſont dues les grandes découvertes, qui font époque dans l'hiſtoire de l'eſprit humain.

La queſtion de déterminer les courbes ou les ſurfaces, pour les quelles certaines fonctions indéfinies ſont plus grandes ou plus petites que pour toutes les autres, avoit exercé les Géomêtres les plus illuſtres du ſiecle dernier; les ſolutions des problêmes du ſolide de la moindre réſiſtance, de la courbe de plus vîte deſcente, de la plus grande des aires iſopérimetres, avoient été célebres en Europe. La méthode générale de réſoudre le problême, étoit cachée dans ces ſolutions, & ſurtout dans celle que JACQUES BERNOULLI avoit trouvée par la queſtion des iſopérimetres & qui lui avoit donné ſur ſon Frere un avantage, que tant de chefs-d'œuvres, enfantés depuis par JEAN BERNOULLI, n'ont pu faire oublier. Mais il falloit développer cette méthode, il falloit la réduire en formules générales; & c'eſt ce que fit M. EULER dans un ouvrage imprimé en 1744 & l'un des plus beaux monumens de ſon génie. Pour trouver ces formules, il avoit été obligé d'employer la conſideration des lignes courbes. Quinze ans après, un jeune Géométre (M. de la GRANGE), qui, dans ſes premiers eſſais, annonçoit un digne ſucceſſeur D'EULER, reſolut le même problême par une mé-

thode purement analytique. M. EULER admira le premier ce nouvel effort de l'art du calcul, s'occupa lui-même d'expoſer la nouvelle méthode, d'en préſenter les principes, & d'en donner les développemens avec cette clarté; cette élégance qui brillent dans tous ſes ouvrages. Jamais le génie ne reçut & ne rendit un plus bel hommage; & jamais il ne ſe montra plus ſupérieur à ces petites paſſions, que le partage d'un peu de glorie rend ſi actives & ſi violentes dans les hommes ordinaires.

Nous terminerons cet expoſé des travaux de M. EULER ſur l'analyſe pure, en obſervant qu'il ſeroit injuſte de borner ſon influence ſur les progrés des mathématiques, aux decouvertes ſans nombre dont ſes ouvrages ſont remplis. Ces communications qu'il a ouvertes entre toutes les parties d'une ſcience ſi vaſte; ces vuës générales que ſouvent même il n'indique pas, mais qui n'échappent point á un eſprit attentif; ces routes dont il s'eſt contenté d'ouvrir l'entrée & d'aplanir les premiers obſtacles, ſont encore autant de bienfaits dont les ſciences s'enrichiront, & dont la poſtérité jouira, en oubliant peut-être la main dont elle les aura reçu.

Le traité de Mécanique, que M. EULER donna en 1736, eſt le premier grand ouvrage où l'analyſe ait été appliquée á la ſcience du mouvement. Le nombre des choſes neuves, ou préſentées d'une maniere nouvelle, qui entrent dans ce trai-

traité, eût étonné, les Géomêtres, ſi M. EULER n'en eût déja publié ſéparément la plus grande partie.

Dans ſes nombreux travaux ſur la même ſcience, il fut toujours fidele á l'analyſe & l'uſage heureux qu'il en a fait, a mérité à cette méthode la préférence qu'elle a enfin obtenue ſur toutes les autres.

La ſolution du problême où l'on cherche le mouvement d'un corps lancé dans l'eſpace & attiré vers deux points fixés, eſt devenue célebre par l'art avec le quel des ſubſtitutions dont M. EULER ſavoit ſi bien prévoir la forme, l'ont conduit à réduire aux quadratures des équations, que leur complication & leur forme pouvoient faire regarder comme inſolubles.

Il appliqua l'analyſe au mouvement d'un corps ſolide, d'une figure donnée; & elle le conduiſit à ce beau Théorême, deja donné par SEGNER, qu'un corps d'une figure quelconque peut tourner librement d'un mouvement uniforme autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, á la connoiſſance de pluſieurs propriétés ſingulieres de ces trois axes principaux, & enfin aux équations générales du mouvement d'un corps, quelque ſoit ſa figure & la loi des forces accélératrices, qui agiſſent ſur ſes élémens, ou ſur quelques unes de ſes parties.

Le problême des cordes vibrantes, & tous ceux qui appartiennent à la Théorie du ſon, ou des loix des oſcillations

de

de l'air, ont été ſoumis à l'analyſe par les nouvelles méthodes dont il enrichit le calcul des différences partielles, une théorie du mouvement des fluides, appuyée ſus ce même calcul, étonna par la clarté qu'il a repandue ſur des queſtions ſi épineuſes & la facilité qu'il a ſu donner à des méthodes fondées ſur l'analyſe ſi profonde.

Tous les problêmes de l'aſtronomie phyſique, qui ont été traités dans ce ſiecle, ont été réſolus par des méthodes analytiques particulières à M. EULER. Sa Théorie de la lune eſt un modele de la ſimplicité, de la préciſion aux quelles on peut porter ces méthodes; &, en liſant cet ouvrage, on n'eſt pas moins étonné de voir juſqu'où un homme d'un grand génie, animé du déſir de ne rien laiſſer à faire ſur une queſtion importante, peut pouſſer la patience & l'opiniâtreté du travail.

L'aſtronomie n'employoit que des methodes géomêtriques, M. EULER ſentit tout ce qu'elle pouvoit eſpérer des ſecours de l'analyſe; & il le prouva par des exemples, qui, imités depuis par pluſieurs ſavans célebres, pourront un jour faire prendre à cette ſcience une forme nouvelle.

Il embraſſa la ſcience navale dans un grand ouvrage, au quel une ſavante analyſe ſert de baſe, & où les queſtions les plus difficiles ſont ſoumiſes à ces methodes générales & fecondes qu'il ſavoit ſi bien créer & employer. Longtems aprés, il publia ſur la même matiere, un abrégé élémentaire

de

de ce même traité, où il renferme ſous la forme la plus ſimple ce qui peut être utile á la pratique & ce que doivent ſavoir ceux qui ſe conſacrent au ſervice de mer. Cet ouvrage, quoique deſtiné par l'auteur aux ſeules écoles de l'empire de Ruſſie, lui merita une gratification du Roi, qui jugea que des travaux utiles à tous les hommes, avoient des droits à la reconnoiſſance de tous les ſouverains, & voulût montrer que même aux extrémités de l'Europe, des talens ſi rares ne pouvoient échapper ni à ſes regards, ni à ſes bienfaits M. EULER fut ſenſible à cette marque de l'eſtime d'un Roi puiſſant & elle reçut un nouveau prix à ſes yeux, de la main qui la lui transmit; c'étoit celle de M. TURGOT, Miniſtre reſpecté dans l'Europe par ſes lumieres, comme par ſes vertus, fait pour commander à l'opinion, plutôt que pour lui obéir, & dont le ſuffrage, toujours dicté par la vérité & jamais par le déſir d'attirer ſur lui même l'approbation publique, pouvoit flatter un ſage trop accoutumé à la gloire, pour être encore ſenſible au bruit de ſa renommée.

Dans les hommes d'un génie ſuperieur, l'extrême ſimplicité de caractere peut s'allier avec les qualités de l'eſprit, qui ſemblent le plus annoncer de l'habileté, ou de la fineſſe.

Auſſi M. EULER, malgré cette ſimplicité qui ne ſe démentit jamais, ſavoit cependant diſtinguer, avec une ſagacité toujours indulgente, il eſt vrai, les hommages d'une admira-

tion

tion éclairée & ceux que la vanité prodigue aux grands hommes, pour s'assurer du moins le mérite de l'enthousiasme.

Les travaux sur la Dioptrique, sont fondés sur une analyse moins profonde ; & on est tenté de lui en savoir gré, comme d'une espece de sacrifice. Les différens rayons, dont un rayon solaire est formé, subissent dans le méme milieu des refractions différentes ; séparés ainsi des rayons voisins, ils paroissent seuls, ou moins mélangés, & donnent la sensation de couleur qui leur est propre. Cette refrangibilité varie dans les différens milieux pour chaque rayon & suivant une loi, qui n'est pas la même que celle de la refraction moyenne dans ces milieux. Cette observation donnoit lieu de croire que deux prismes inégaux & de différentes matieres, combinés ensemble, pourroient détourner un rayon de sa route sans le décomposer, ou plutôt en replaçant par une triple refraction les rayons élémentaires dans une direction parallele.

De la vérité de cette conjecture pouvoit dépendre, dans les lunettes, la destruction des iris qui colorent les objets vus à travers les verres lenticulaires. M. EULER étoit convaincu de la possibilité du succés, d'aprés cette idée méthaphisique, que si l'oeil a été composé de diverses humeurs, c'est uniquement dans l'intention d'y détruire les effets de l'aberration de refrangibilité. Il ne s'agissoit donc que de chercher à imiter l'opération de la nature ; & il en proposa

les

les moyens, d'après une théorie qu'il s'étoit formée. Ses premiers essais exciterent les Physiciens à s'occuper d'un objet qu'ils paroissoient avoir negligé. Leurs expériences ne confirmerent point la théorie de M. EULER : mais elles confirmerent les vues qu'il avoit eues sur la perfection des lunettes. Instruit alors par eux des loix de la dispersion dans les différens milieux, il abandonna ses premieres idées, soumit au calcul les résultats de leurs expériences & enrichit la Dioptrique de formules analytiques simples, commodes, générales, applicables à tous les instrumens qu'on peut construire.

On a encore de M. EULER quelques essais sur la théorie générale de la lumiere, dont il cherchoit à concilier les phénomenes avec les lois des oscillations d'une fluide, parceque l'hypothése de l'émission des rayons en ligne droite, lui paroissoit présenter des difficultés insurmontables. La Théorie de l'aiman, celle de la cohésion des corps, celles des frottemens, furent aussi pour lui l'occasion de savans calculs, appuyés malheureusement sur des hypothéses, plutôt que sur des expériences.

Le calcul des probabilités, l'arithmétique politique, furent encore l'objet da ses infatigables travaux. Nous ne citerons ici que ses recherches sur les tables de mortalité & sur les moyens de les déduire des phénomenes avec plus d'exactitude. Sa méthode de prendre un milieu entre des observations, ses calculs sur l'établissement d'une caisse d'em-

prunt, dont le but eſt d'aſſurer aux veuves, aux enfans, ou une ſomme fixe, ou une rente, payables aprés la mort d'un mari, ou d'un pere: moyen ingénieux, imaginé par des Géométres-Philoſophes, pour contrebalancer le mal moral, qui réſulte de l'établiſſement des rentes viageres, & pour rendre utiles aux familles les plus petites épargnes que leur chef peut faire ſur ſon gain journalier, ou ſur les appointemens ſoit d'une commiſſion, ſoit d'une place.

On a vu dans l'éloge de M. DANIEL BERNOULLI, qu'il avoit partagé avec M. EULER ſeul la gloire d'avoir remporté dix prix à l'académie des ſciences. Souvent ils travaillerent pour les mêmes ſujets, & l'honneur de l'emporter ſur ſon concurrent fut encore partagé entr'eux, ſans que jamais cette rivalité ait ſuſpendu les temoignages reciproques de leur eſtime, ou refroidi le ſentiment de leur amitié. En examinant les ſujets ſur les quels l'un ou l'autre ont obtenu la victoire, on voit que le ſuccés a dépendu ſurtout du caractere de leur talent; lorsque la queſtion exigeoit de l'adreſſe dans la maniere de l'enviſager, un uſage heureux de l'expérience, ou des vues de phyſique ingénieuſes & neuves l'avantage étoit pour M. DANIEL BERNOULLI; n'offroit elle a vaincre que de grandes difficultés de calcul, falloit-il créer de nouvelles méthodes d'analyſe, c'étoit M. EULER qui l'emportoit; & ſi l'on pouvoit avoir la témérité de vouloir juger entr'eux, ce ne ſeroit pas entre deux hommes

qu'on

qu'on auroit à prononcer, ce feroit entre deux genres d'efprit, entre deux manieres d'employer le génie.

Nous n'aurions donné qu'une idée trés-imparfaite de la fécondité de M. EULER, fi nous n'ajoutions à cette foible efquiffe de fes travaux, qu'il eft peu de fujets importans pour les quels il ne foit revenu fur fes traces, en refaifant même plufieurs fois fon premier ouvrage. Tantôt il fubftituoit une méthode directe & analytique à une méthode indirecte. Tantôt il étendoit fa premiere folution à des cas qui lui avoient d'abord échappé; ajoutant prefque toujours de nouveaux exemples, qu'il favoit choifir avec un art fingulier, parmi ceux qui offroient ou quelque application utile, ou quelque remarque curieufe. La feule intention de donner à fon travail une forme plus méthodique, d'y repandre plus de clarté, d'y ajouter un nouveau degré de fimplicité, fuffifoit pour le déterminer à des travaux immenfes. Jamais Géométre n'a tant écrit; & jamais aucun n'a donné à fes ouvrages un tel degré de perfection. Lorsqu'il publioit un mémoire fur un objet nouveau, il expofoit avec fimplicité la route qu'il avoit parcourue, il en faifoit obferver les difficultés, ou les détours; & aprés avoir fait fuivre fcrupuleufement à fes lecteurs la marche de fon efprit dans fes premiers effais, il leur montroit enfuite comment il étoit parvenu à trouver une route plus fimple. On voit qu'il préféroit l'inftruction de fes difciples, a la petite fatisfaction de

les étonner, & qu'il croyoit n'en pas faire assés pour la science, s'il n'ajoutoit aux vérités nouvelles, dont il l'enrichissoit, l'exposition naïve des idées qui l'y avoient conduit.

Cette méthode d'embrasser ainsi toutes les branches des mathématiques, d'avoir pour ainsi dire toujours présentes à l'esprit toutes les questions & toutes les théories, étoit pour M. EULER une source de découvertes fermée pour presque tous les autres, ouverte pour lui seul. Ainsi, dans la suite de ses travaux, tantôt s'offroit à lui une méthode singuliere d'integrer des équations en les différentiant, tantôt une remarque sur une question d'analyse, ou de mécanique, le conduisoit à la solution d'une équation différentielle très-compliquée, qui échappoit aux méthodes directes. C'est quelquefois un problême en apparence très difficile, qu'il résout en un instant par une méthode très simple, ou un problême qui paroit élementaire & dont la solution a des difficultés qu'il ne peut vaincre que par de grands efforts; d'autres fois, des combinaisons de nombres singuliers, des séries d'une forme nouvelle, lui présentent des questions piquantes, par leur nouveauté, ou le menent à des vérités inattendues; M. EULER avertissoit alors avec soin que c'étoit au hazard qu'il devoit les découvertes de ce genre. Ce n'étoit pas en diminuer le mérite; car on voyoit aisément que ce hazard ne pourroit arriver qu'à un homme qui joindroit à une vaste

ſte étendue de connoiſſances, la ſagacité la plus rare. D'ailleurs, peut-être ne faudroit-il pas le louer de cette candeur, quand même elle lui auroit coûté un peu de ſa gloire. Les hommes d'un grand génie ont rarement ces petites ruſes de l'amour propre, qui ne ſervent qu'à rapetiſſer aux yeux des juges èclairés ceux qu'elles agrandiſſent dans l'opinion de la multitude, ſoit que l'homme de génie ſente qu'il ne ſera jamais plus grand qu'en ſe montrant tel qu'il eſt, ſoit que l'opinion n'ait pas ſur lui cet empire qu'elle exerce avec tant de tyrannie ſur les hommes médiocres.

Lorſque l'on lit la vie d'un grand homme, ſoit conviction de l'imperfection attachée à la foibleſſe humaine, ſoit que la juſtice dont nous ſommes capables ne puiſſe atteindre juſqu'à reconnoitre dans nos ſemblables une ſupériorité dont rien ne nous conſole, ſoit enfin que l'idée de la perfection dans uu autre, nous bleſſe, ou nous humilie encore plus que celle de la grandeur; il ſemble qu'on a beſoin de trouver un endroit foible; on cherche quelque défaut qui puiſſe nous relever à nos propres yeux, & l'on eſt involontairement porté à ſe défier de la ſincérité de l'Ecrivain, s'il ne nous montre pas cet endroit foible, s'il ne ſouleve point le voile important dont ces défauts ſont couverts.

M. EULER poroiſſoit quelquefois ne s'occuper que du plaiſir de calculer & regarder le point de mécanique ou de phyſique, qu'il examinoit ſeulement comme une occaſion d'exer-

d'exercer son génie & de se livrer à sa passion dominante. Aussi les savans lui ont-ils reproché d'avoir quelquefois prodigué son calcul à des hypotheses physiques, ou même à des principes métaphysiques, dont il n'avoit pas assés examiné ou la vraisemblance, ou la solidité. Ils lui reprochoient aussi de s'être trop reposé sur les ressources du calcul & d'avoir negligé celles que pouvoit lui donner l'examen des questions même qu'il se proposoit de résoudre. Nous conviendrons que le premier reproche n'étoit pas sans fondement. Nous avouerons que dans M. EULER, le Metaphysicien, ou même le Physicien, n'a pas été si grand, que le Géométre; & l'on doit regreter sans doute que plusieurs parties de ses ouvrages, par exemple de ceux qu'il a faits sur la science navale, sur l'artillerie, n'ayent presque été utiles qu'aux progrés de la science du calcul. Mais nous croyons que le second reproche est beaucoup moins mérité. Partout, dans les ouvrages de M. EULER, on le voit occupé d'ajouter aux richesses de l'analyse, d'en étendre & d'en multiplier les applications. En même tems qu'elle paroit son instrument unique, on voit qu'il a voulu en faire un instrument universel. Le progrés naturel des sciences mathématiques devoit amener cette révolution; mais il l'a vu, pour ainsi dire, s'accomplir sous ses yeux; c'est à son génie que nous la devons; elle a été le prix de ses efforts & de ses découvertes. Ainsi, lors même qu'il paroissoit abuser de l'analyse, & en épuiser

tous

tous les secrets pour résoudre une question dont quelques reflexions, étrangeres au calcul, lui eussent donné une solution simple & facile, souvent il ne cherchoit qu'à montrer les forces & les ressources de son art; & on doit lui pardonner si quelquefois, en paroissant s'occuper d'une autre science, c'étoit encore au progrés & à la propagation de l'analyse que ses travaux étoient consacrés, puisque la révolution qui en a été le fruit est un de ses premiers droits à la reconnoissance des hommes & un de ses plus beaux titres à la gloire.

Je n'ai pas cru devoir interrompre le détail des travaux de M. EULER, par le recit des événemens tres-simples & trés peu multipliés de sa vie.

Il s'établit à Berlin en 1741 & y resta jusqu'en 1766.

Madame la Princesse D'ANHALT-DESSAU, Niece du Roi de Prusse, voulut recevoir de lui quelques leçons de physique. Ces leçons ont été publiées sous le nom de lettres à une Princesse d'Allemagne: ouvrage précieux par la clarté singuliere aves la quelle il y a exposé les vérités les plus importantes de la mécanique, de l'astronomie physique, de l'optique & de la théorie des sons; & par des vues ingénieuses moins philosophiques, mais plus savantes que celles qui ont fait survivre le livre de la pluralité du monde, au systéme des tourbillons. Le nom d'EULER, si grand dans les sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses ouvra-

ges

ges destinés à approfondir ce que l'analyse a de plus épineux & de plus abstrait, donne à ces lettres si simples, si faciles, un charme singulier. Ceux qui n'ont pas étudié les mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un ouvrage d'EULER, lui savent gré de s'être mis à leur portée; & ces détails élémentaires des sciences, acquierent une sorte de grandeur, par le raprochement qu'on en fait avec la gloire & le génie de l'homme illustre, qui les a tracées.

Le Roi de Prusse employa M. EULER à des calculs sur les monnoies, à la conduite des eaux de Sans-souci, à l'examen de plusieurs canaux de navigation. Ce Prince n'étoit pas né pour croire que de grands talens & des connoissances profondes, fussent jamais des qualités superflues & dangereuses; & le bonheur de pouvoir être utile, un avantage reservé par la nature à l'ignorance & à la mediocrité.

En 1750, M. EULER fit le voyage de Francfort pour y recevoir sa mere, veuve alors, & la ramener à Berlin. Il eut le bonheur de l'y conserver jusqu'en 1761. Pendant onze ans, elle jouit de la gloire de son fils, comme le cœur d'une mere sait en jouir, & fut plus heureuse encore peut-être par ses soins tendres & assidus dont cette gloire augmentoit le prix.

Ce fut pendant son séjour à Berlin, que M. EULER, lié par la reconnoissance à M. MAUPERTUIS, se crut obligé de defendre ce principe de la moindre action, sur lequel

le

le Président de l'académie de Prusse avoit fondé l'espérance d'une si grande renommée. Le moyen que choisit M. EULER ne pouvoit guere être employé que par lui. C'étoit de résoudre par ce principe quelques uns des problémes les plus difficiles de la mécanique. Ainsi, dans les tems fabuleux, les Dieux daignoient fabriquer pour les guerriers, qu'ils favorisoient, des armes impénétrables aux coups de leurs adversaires. Nous desirerions que la reconnoissance de M. EULER se fut bornée à une protection si noble & si digne de lui; mais on ne peut se dissimuler qu'il n'ait montré trop de dureté dans ses réponses à KOENIG: & c'est avec douleur que nous sommes obligés de compter un grand homme parmi les ennemis d'un savant malheureux & persécuté. Heureusement, toute la vie de M. EULER le met à l'abri d'un soupçon plus grave. Sans cette indifférence pour la renommée, qu'il a montrée constamment, on auroit pu croire que les plaisanteries d'un illustre partisan de M. EULER (plaisanteries que M. DE VOLTAIRE lui-même a depuis condamnées a un juste oubli) avoient altéré le caractere de M. EULER. Mais s'il fit alors une faute, c'est à l'excès seul de la reconnoissance qu'il faut l'attribuer; & c'est par un sentiment respectable, qu'il a été injuste une seule fois dans sa vie.

Les Russes ayant pénétré dans la Marche en 1760, pillerent une métairie que M. EULER avoit auprés de Charlottembourg; mais le Général TOTTLEBEN n'étoit pas venu

faire la guerre aux ſciences. Inſtruit de la perte que M. EULER avoit eſſuyée, il s'empreſſa de la reparer, en faiſant payer le dommage à un prix fort au deſſus de la valeur réelle; & il rendit compte de ce manque d'égards involontaire à l'Impératrice ELISABETH, qui ajouta un don de quatre mille florins, à une indemnité déja beaucoup plus que ſuffiſante. Ce trait n'a point été connu en Europe; & nous citons avec enthouſiaſme quelques actions ſemblables, que les anciens nous ons tranſmiſes. Cette différence dans nos jugemens, n'eſt-elle pas une preuve de ces progrés heureux de l'eſpece humaine, que quelques Ecrivains s'obſtinent à nier encore apparemment pour éviter qu'on ne les accuſe d'en avoir été les complices?

Le Gouvernement de Ruſſie n'avoit jamais traité M. EULER comme un étranger; une partie de ſes appointemens lui fut toujours payée malgré ſon abſence; & l'Impératrice l'ayant appellé en 1766, il conſentit à retourner à Petersbourg.

En 1735, les efforts que lui avoit couté un calcul aſtronomique, pour le quel les autres Académiciens demandoient pluſieurs mois, & qu'il acheva en peu de jours, lui avoient cauſé une maladie, ſuivie de la perte d'un œil. Il avoit lieu de craindre une cécité complette, s'il s'expoſoit de nouveau dans un climat dont l'influence lui êtoit contraire. L'intérét de ſes enfans l'emporta ſur cette crainte; &, ſi on ſonge que l'étude étoit pour M. EULER une paſſion ex-

exclusive, on jugera sans doute que peu d'exemples d'amour paternel ont mieux prouvé qu'il est la plus douce de nos affections.

Il essuya, peu d'années après, le malheur qu'il avoit prévû; mais il conserva, heureusement pour lui & pour les sciences, la faculté de distinguer encore de grands caracteres tracés sur une ardoise avec de la craie. Ses fils, ses éleves, copioient ses calculs, écrivoient sous sa dictée le reste de ses mémoires; & si on en juge par leur nombre & souvent par le génie qu'on y retrouve, on pourroit croire que l'absence encore plus absolue de toute distraction, & la nouvelle énergie que ce recueillement forcé donoit à toutes ses facultés, lui ont fait plus gagner que l'affoiblissement de sa vue n'a pu lui faire perdre de facilité & de moyens pour le travail.

D'ailleurs, M. EULER, par la nature de son génie, par l'habitude de sa vie, s'etoit même involontairement préparé des ressources extraordinaires, en examinant ces grandes formules analytiques, si rares avant lui, si frequentes dans ses ouvrages, dont la combinaison & le développement réunissent tant de simplicité & d'élégance, dont la forme même plait aux yeux come à l'esprit, on voit qu'elles ne sont pas le fruit d'un calcul tracé sur le papier, & que produites toutes entieres dans sa tête, elles y ont été créées par une imagination également puissante & active. Il existe dans l'analyse (& M. EULER en a beaucoup multiplié le nombre)

des formules d'une application commune, & presque journaliere. Il les avoit toujours présentes à l'esprit, les savoit par cœur, les recitoit même de mémoire; & M. D'ALEMBERT, lorsqu'il vit M. EULER à Berlin, fut étonné de ce phénomene, nouveau même pour lui. Enfin sa facilité à calculer de tête étoit portée à un degré qu'on croiroit à peine, si l'histoire de ses travaux n'avoit accoutumé aux prodiges. On l'a vû, dans l'intention d'exercer son petit fils aux extractions de racines, se former la table des six premieres puissances de tous les nombres, depuis un jusqu'à cent & la conserver exactemens dans sa mémoire. Deux de ses disciples avoient calculé, jusqu'au dixseptieme terme, une série convergente assés compliquée. Leurs résultats, quoique formés d'aprés un calcul écrit, différoient d'une unité au cinquantiéme chiffre. Ils firent part de cette dispute à leur maitre. M. EULER refit le calcul entier dans sa tête, & sa décision se trouva conforme à la vérité.

Depuis la perte de sa vue, il n'avoit d'autre amusement que de faire des aimans artificiels, & de donner des leçons de mathématiques a un de ses petits-fils, qui lui paroissoit annoncer d'heureuses dispositions.

Il alloit encore quelque fois à l'Académie, principalement dans les circostances difficiles, où il croyoit que sa présence pouvoit être utile pour y maintenir la liberté. On sent combien un Président perpétuel nommé par la Cour

peut

peut troubler le repos d'une Académie, & tout ce qu'elle en doit craindre, lorsque, n'étant pas choisi dans la classe des savans, il ne se sent pas même arrêté par le besoin qu'a sa réputation du suffrage de ses confreres. Et comment des hommes, uniquement occupés de leurs paisibles travaux & ne sachant parler que le langage des sciences, pourroient-ils alors se défendre, surtout si étrangers, isolés, éloignés de leur patrie, ils tiennent tout du Gouvernement, au quel ils ont à demander justice contre le chef que ce Gouvernement même leur a donné?

Mais il est un degré de gloire où l'on se trouve au dessus de la crainte: c'est lorsque l'Europe entiere s'éleveroit contre une injure personnelle faite à un grand-homme, qu'il peut sans risque déployer contre l'injustice l'autorité de sa renommée & élever en faveur des sciences une voix qu'on ne peut empêcher de se faire entendre. M. EULER, tout simple, tout modeste qu'il étoit, sentoit ses forces, & les a plus d'une fois heureusement employées.

En 1771, la ville de Petersbourg éprouva un incendie terrible. Les flammes gagnerent la maison de M. EULER. Un Baslois, M. PIERRE GRIMON, (dont le nom mérite sans doute d'être conservé) apprend le danger de son illustre compatriote, aveugle & souffrant, il se précipite au travers des flammes, pénêtre jusqu'à lui, le charge sur ses épaules & le sauve au péril de sa vie. Sa Bibliothéque, ses meubles

furent consumés. Mais les soins empressés du Comte ORLOFF sauverent ses manuscrits; & cette attention, au milieu du trouble & des horreurs de ce grand désastre, est un des hommages les plus vrais & les plus flatteurs, que jamais l'autorité publique ait rendu au génie des sciences. La maison de M. EULER étoit un des bienfaits de l'Impératrice, & un nouveau bienfait en répara promptement la perte. Il a eu de sa premiere femme treize enfans, dont huit morts en bas-age. Ses trois fils lui ont survécu; & il eût le malheur de perdre ses deux filles dans la derniere année de sa vie. De trente huit petits enfans, vingt-six vivoient encore à l'époque de sa mort. En 1776, il épousa en secondes noces, Mlle. GSELL, sœur de pere de sa premiere femme. Il avoit gardé toute la simplicité de mœurs dont la maison paternelle lui avoit donné l'exemple. Tant qu'il a conservé la vie, il rassembloit tous les soirs, pour la priere commune, ses enfans, ses petits enfans, ses domestiques & ceux de ses éléves qui logeoient chez lui. Il leur lisoit un chapitre de la Bible, & quelque fois accompagnoit cette lecture d'une exhortation.

Il étoit trés religieux; on a de lui une preuve nouvelle de l'existence de Dieu, & de la spiritualité de l'ame. Cette derniere même a été adoptée dans plusieurs écoles de Théologie. Il avoit conservé scrupuleusement la religion de son pays, qui est le Calvinisme rigide; & il ne paroit pas qu'à l'exem-

l'exemple de la plupart des Savans proteſtans, il ſe ſoit permis d'adopter des opinions particulieres & de ſe former un ſyſtême de religion.

Son érudition étoit très étendue, ſurtout dans l'hiſtoire des mathématiques. On a prétendu qu'il avoit porté ſa curioſité juſqu'à s'inſtruire des procédés & des regles de l'aſtrologie & que même il en avoit fait quelques applications. Cependant, lorſqu'en 1740 on lui donna ordre de faire l'horoſcope du Prince YVAN, il repréſenta que cette fonction appartenoit à M. KRAAF, qui, en qualité d'aſtronome de la cour, fut obligé de la remplir. Cette crédulité, qu'on eſt étonné de trouver à cette époque dans la cour de Ruſſie, étoit générale, un ſiecle auparavant, dans toutes les Cours de l'Europe. Celles de l'Aſie n'en ont pas encore briſé le joug; & il faut avouer que, ſi on en excepte les maximes communes de la morale, il n'y a juſqu'ici aucune vérité qui puiſſe ſe glorifier d'avoir été adoptée auſſi généralement & auſſi longtems que beaucoup d'erreurs, ou ridicules ou funeſtes.

M. EULER avoit étudié presque toutes les branches de la phyſique, l'anatomie, la chymie, la botanique; mais ſa ſupériorité dans les mathématiques ne lui permettoit pas d'attacher la plus petite importance à ſes connoiſſances dans les autres genres, quoiqu'aſſez étendues, pour qu'un homme, plus ſuſceptible des petiteſſes de l'amour-propre, êut pû aſpirer à une ſorte d'univerſalité.

L'é-

L'étude de la littérature ancienne & des langues ſavantes avoit fait partie de ſon éducation. Il en conſerva le gout toute ſa vie ; & n'oublia rien de ce qu'il avoit appris ; mais il n'eût jamais ni le tems, ni le déſir d'ajouter à ſes premieres études. Il n'avoit pas lû les poëtes modernes & ſavoit par cœur l'Eneïde.

Mais M. EULER ne perdoit pas de vue les mathèmatiques, même lorſqu'il récitoit les vers de Virgile. Tout étoit propre á lui rappeller cet objet preſque unique de ſes penſées, & on trouve dans ſes ouvrages un ſavant mémoire ſur une queſtion de mécanique, dont il racontoit qu'un vers de l'Eneïde lui avoit donné la premiere idée.

On a dit que, pour les hommes d'un grand talent, le plaiſir du travail en étoit une récompenſe plus douce encore que la gloire. Si cette vérité avoit beſoin d'être prouvé par des exemples, celui de M. EULER. ne permetroit plus d'en douter.

Jamais dans ſes ſavantes diſcuſſions avec de célebres Géomêtres, il n'a laiſſé échapper un ſeul trait qui puiſſe faire ſoupçonner qu'il ſe ſoit occupé des intérêts de ſon amour-propre. Jamais il n'a reclamé aucune de ſes découvertes ; &, ſi on revendiquoit quelque choſe dans ſes ouvrages, il s'empreſſoit de réparer une injuſtice involontaire, ſans même trop examiner ſi l'équitè rigoureuſe exigeoit de lui un abandon abſolu. Y avoit-on relevé quelqu'erreur, ſi le reproche étoit

mal

mal fondé, il l'oublioit; s'il étoit juste, il se corrigeoit, & ne songeoit méme pas à observer que souvent le mérite de ceux qui se vantoient d'avoir aperçu ses fautes, consistoit seulement dans une application facile des Méthodes, que lui même leur avoit enseignées, à des Théories dont il avoit applani d'avance les plus grandes difficultés.

Presque toujours les hommes médiocres cherchent à se faire valoir par une sévérité proportionnée à la haute idée qu'ils veulent donner de leur jugement, ou de leur génie. Inexorables pour tout ce qui s'éleve au dessus d'eux, ils ne pardonnent même pas à l'inferiorité. On diroit qu'un sentiment secret les avertit du besoin qu'ils ont de rabaisser les autres. Au contraire, le premier mouvement de M. EULER le portoit à célébrer les talens dés l'instant où quelques essais heureux frappoient ses regards, & sans attendre qu'une juste admiration eût sollicité son suffrage. On le voit employer son tems à refaire, à éclaircir ses ouvrages & même à résoudre des problêmes déja résolus, qui ne lui laissoient plus que le mérite de plus d'élégance & de méthode, avec la même ardeur, la même constance, qu'il eût mises à poursuivre une vérité nouvelle, dont la découverte auroit ajouté à sa renommée. D'ailleurs, si le désir ardent de la gloire eût existé au fond de son cœur, la franchise de son caractere ne lui eût pas permis d'en cacher les mouvemens. Mais cette gloire, dont il s'occupoit si peu, vint le chercher. La fé-

condité ſinguliére de ſon génie frappoit même ceux qui n'étoient pas en état d'entendre ſes ouvrages. Quoiqu'uniquement livré à la Géométrie, ſa réputation s'étendit parmi les hommes les plus étrangers à cette ſcience; & il fût pour l'Europe entiere, non ſeulement grand Géomêtre, mais un grand-homme.

Il eſt d'uſage en Ruſſie d'accorder des titres militaires à des hommes très étrangers au ſervice. C'eſt rendre hommage au préjugé qui faiſoit regarder cet Etat comme la ſeule profeſſion noble, & avouer en même tems qu'on en reconnoit toute la fauſſeté. Quelques ſavans ont obtenu juſqu'au grade de Général-Major: M. EULER n'en eût & n'en vouloit point avoir aucun. Mais quel titre pouvoit honorer le nom d'EULER? Et alors le reſpect pour la conſervation des droits naturels de l'homme, impoſe en quelque ſorte le devoir de donner l'exemple d'une ſage indifférence pour ces hochets de la vanité humaine, ſi puérile, mais ſi dangereux.

La plupart des Princes du Nord, dont il étoit perſonnellement connu, lui ont donné des marques de leur eſtime, ou plutôt de la vénération, qu'on ne pouvoit refuſer à la réunion d'une vertu ſi ſimple & d'un génie ſi vaſte & ſi élevé. Dans le voyage que le Prince Royal de Pruſſe fit à Petersbourg, il prévint la viſite de M. EULER & paſſa quelques heures à coté du lit de cet illuſtre vieillard, ayant ſes mains dans les ſiennes & tenant ſur ſes genoux un petit fils d'EU-

d'EULER, que ſes diſpoſitions précoces pour la Géométrie avoient rendu l'objet particulier de ſa tendreſſe paternelle.

Tous les mathématiciens célebres qui exiſtent aujourd'hui ſont ſes éleves. Il n'en eſt aucun qui ne ſe ſoit formé par la lecture de ſes ouvrages, qui n'ait reçu de lui les formules, la métode qu'il emploie, qui, dans ſes découvertes ne ſoit guidé & ſoutenu par le génie d'EULER. Il doit cet honneur à la révolution qu'il a produite dans les ſciences mathématiques, en les ſoumettant toutes à l'analyſe; à ſa force pour le travail, qui lui a permis d'ambraſſer toute l'étendue de ces ſciences; à l'ordre méthodique qu'il a ſçu mettre dans ſes grands ouvrages; à la ſimplicité, à l'élégance de ſes formules; à la clarté de ſes méthodes & de ſes démonſtrations, qu'augmente encore la multiplicité & le choix de ſes exemples. Ni NEWTON, ni DESCARTES même, dont l'influence a été ſi puiſſante, n'ont obteuu cette gloire; & juſqu'ici, ſeul entre tous les Géomètres, M. EULER l'a poſſédée toute entiere & ſans partage.

Mais comme Profeſſeur, il a formé des éleves qui lui appartiennent plus particulierement, & parmi les quels nous citerons ſon fils ainé, que l'Académie des ſciences a choiſi pour le remplacer, ſans craindre que cette ſucceſſion honorable accordée au nom d'EULER, connue à celui de BERNOULLI, pût devenir un exemple dangereux; un ſecond fils livré aujourd'hui à l'étude de la Médicine, mais qui dans ſa jeuneſſe

a remporté dans cette Académie un prix ſur les altérations du moyen mouvement des planêtes: M. LEXELL, qu'une mort prématurée vient d'enlever aux ſciences, enfin M. FUSS, le plus jeune de ſes diſciples, le compagnon de ſes derniers travaux, qui, envoyé de BASLE à M. EULER, par M. DANIEL BERNOULLI, s'eſt montré digne par ſes ouvrages du choix de BERNOULLI & des leçons d'EULER & qui, aprés avoir rendu dans l'Académie de Petersbourg un hommage public à ſon illuſtre Maitre, vient de s'unir à ſa petite-fille.

De ſeize Profeſſeurs attachés à l'Académie de Petersbourg, huit avoient été formés par lui & tous connus par leurs ouvrages & décorés de titres académiques, ſe glorifioient de pouvoir y ajouter celui de diſciples d'EULER.

Il avoit conſervé toute ſa facilité, & en apparence toutes ſes forces. Aucun changement n'annonçoit que les ſciences fuſſent menacées des le perdre. Le ſept Septembre 1783, après s'être amuſé à calculer ſur une ardoiſe les loix du mouvement aſcenſionel des machines Aëroſtatiques, dont la découverte récente occupoit alors toute l'Europe, il dina avec M. LEXELL & ſa famille, parla de la planette d'Herſchell, & des calculs qui en déterminent l'orbite; peu de tems aprés, il fit venir ſon petit-fils, avec le quel il badinoit en prenant quelques taſſes de Thé, lorſque tout à coup la pipe, qu'il tenoit à la main, lui échappa, & il ceſſa de calculer & de vivre.

Tel-

Telle fut la fin d'un des hommes les plus grands & les plus extraordinaires que la nature ait jamais produits, dont le génie fut également capable des plus grands éfforts & du travail le plus continu, qui multiplia ses productions au delà de ce qu'on eut osé attendre des forces humaines & qui cependant fut original dans chacune, dont la tête fut toujours occupée & l'âme toujours calme, & qui, par une destinée malheureusement trop rare, réunit & mérita de réunir un bonheur presque sans nuage à une gloire qui ne fut jamais contestée.

Sa mort a été regardée comme une perte publique, même dans le pays qu'il habitoit. L'Académie de Petersbourg a porté solemnellement son deuil & lui a décerné à ses frais un buste de marbre, qui doit être placé dans ses salles d'assemblée. Elle lui avoit deja rendu pendant sa vie un honneur plus singulier peut-être. Dans un tableau allégorique, la figure de la Géométrie s'apuie sur une planche chargée de calculs; & ce sont les formules de sa nouvelle Théorie de la lune, que l'Académie a ordonné d'y inscrire. Ainsi un Pays qu'au commencement de ce siecle, nous regardions encore comme barbare, apprend aux nations les plus éclairées de l'Europe à honnorer la vie des grands hommes & leur mémoire récente. Il donne à ces nations un exemple que plusieurs d'entre elles auroient à rougir peut-être, de n'avoir sçu ni prévenir, ni même imiter.

PRAEFATIO.

Quid ſit Calculus Differentialis, atque in genere Analyſis infinitorum, iis qui nulla adhuc eius cognitione ſunt imbuti, vix explicari poteſt: neque hic, uti in aliis diſciplinis fieri ſolet, exordium tractationis a definitione commode ſumere licet. Non quod huius calculi nulla plane detur definitio; ſed quoniam ad eam intelligendam eiuſmodi opus eſt notionibus, non ſolum in vita communi, verum etiam in ipſa Analyſi finitorum minus uſitatis, quae demum in Calculi Differentialis pertractatione evolvi atque explicari ſolent: quo fit, ut eius definitio non ante percipi queat, quam eius principia iam ſatis dilucide fuerint perſpecta. Primum igitur hic calculus circa quantitates variabiles verſatur: etſi enim omnis quantitas ſua natura in infinitum augeri & diminui poteſt; tamen dum calculus ad certum quoddam inſtitutum dirigitur, aliae quantitates conſtanter eandem magnitudinem retinere concipiuntur, aliae vero per omnes gradus auctionis ac diminutionis variari: ad quam diſtinctionem notandam illae quantitates conſtantes, hae vero variabiles vocari ſolent; ita ut hoc diſcrimen non tam in rei natura, quam in quaeſtionis, ad quam calculus refertur, indole ſit poſitum. Quoniam haec differentia inter quantitates conſtantes & variabiles exemplo maxime illuſtrabitur, conſideremus iactum globi ex tormento bellico vi pulveris pyrii exploſi; ſiquidem hoc exemplum ad rem dilucidandam imprimis idoneum videtur. Plures igitur hic occurrunt quantitates, quarum ratio in iſta inveſtigatione eſt habenda: primo ſcilicet quantitas pulveris pyrii; tum elevatio tormenti ſupra horizontem; tertio longitudo iactus ſuper plano horizontali; quarto tempus, quo globus exploſus in aere verſatur: ac niſi experimenta eodem tormento inſtituantur, inſuper eius longitudo cum pondere globi in computum trahi deberet. Verum hic a

va-

varietate tormenti & globi animum removeamus, ne in quaestiones nimium implicatas incidamus. Quodsi ergo servata perpetuo eadem pulveris pyrii quantitate, elevatio tormenti continuo immutetur, iactusque longitudo cum tempore transitus globi per aerem requiratur; in hac quaestione copia pulveris seu vis impulsus erit quantitas constans, elevatio autem tormenti cum longitudine iactus eiusque duratione ad quantitates variabiles referri debebunt; si quidem pro omnibus elevationis gradibus has res definire velimus, ut inde innotescat, quantae mutationes in longitudine ac duratione iactus ab omnibus elevationis variationibus oriantur. Alia autem erit quaestio, si servata eadem tormenti elevatione, quantitas pulveris pyrii continuo mutetur, & mutationes, quae inde in iactum redundant, definiri debeant: hic enim elevatio tormenti erit quantitas constans, contra vero quantitas pulveris pyrii, & longitudo ac duratio iactus quantitates variabiles. Sic igitur patet, quomodo mutato quaestionis statu eadem quantitas modo inter constantes, modo inter variabiles numerari queat: simul autem hinc intelligitur, ad quod in hoc negotio maxime est attendendum, quomodo quantitates variabiles aliae ab aliis ita pendeant, ut mutata una reliquae necessario immutationes recipiant. Priori scilicet casu, quo quantitas pulveris pyrii eadem manebat, mutata tormenti elevatione etiam longitudo & duratio iactus mutantur; suntque ergo longitudo & duratio iactus quantitates variabiles pendentes ab elevatione tormenti, hacque mutata simul certas quasdam mutationes patientes: posteriori vero casu pendent a quantitate pulveris pyrii, cuius mutatio in illis certas mutationes producere debet. Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur; cuiusmo-

modi sunt quadratum eius xx, *aliaeve potentiae quaecunque nec non quantitates ex bis utcunque compositae; quin etiam transcendentes, & in genere quaecunque ita ab* x *pendent, ut aucta vel diminuta* x *ipsae mutationes recipiant. Hinc iam nascitur quaestio, qua quaeritur, si quantitas* x *data quantitate sive augeatur sive diminuatur, quantum inde quaevis eius functiones immutentur, seu quantum incrementum decrementumve accipiant. Casibus quidem simplicioribus haec quaestio facile resolvitur: si enim quantitas* x *augeatur quantitate* ω, *eius quadratum* xx *hinc incrementum capiet* $2x\omega + \omega\omega$; *sicque incrementum ipsius* x *se habebit ad incrementum ipsius* xx, *ut* ω *ad* $2x\omega + \omega\omega$, *hoc est, ut* 1 *ad* $2x + \omega$; *similique modo in aliis casibus ratio incrementi ipsius* x *ad incrementum, vel decrementum, quod quaevis eius functio inde adipiscitur, considerari solet. Est vero investigatio rationis huiusmodi incrementorum ipsa non solum maximi momenti, sed ei etiam universa Analysis infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, sumamus exemplum superius quadrati* xx, *cuius incrementum* $2x\omega + \omega\omega$, *quod capit, dum ipsa quantitas* x *incremento* ω *augetur, vidimus ad hoc rationem tenere, ut* $2x + \omega$ *ad* 1; *unde perspicuum est, quo minus sumatur incrementum* ω, *eo propius istam rationem accedere ad rationem* $2x$ *ad* 1; *neque tamen ante prorsus in hanc rationem abit, quam incrementum illud* ω *plane evanescat. Hinc intelligimus, si quantitatis variabilis* x *incrementum* ω *in nihilum abeat, tum etiam quadrati eius* xx *incrementum inde oriundum quidem evanescere, verumtamen ad id rationem tenere ut* $2x$ *ad* 1; *& quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius* x *est intelligendum; quippe quarum incrementa evanescentia, quae capiunt, dum ipsa quantitas* x *incrementum evanescens sumit ad hoc ipsum certam & assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem* calculi Differentialis, *qui est* methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt,

dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur: *hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri, atque adeo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur: & cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim praecepta, uti vulgo tradi solent, ad ista incrementa evanescentia definienda videantur accommodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur. Simili vero modo calculi integralis ratio est comparata, qui convenientissime ita definitur, ut dicatur esse* methodus ex cognita ratione incrementorum evanescentium ipsas illas functiones, quarum sunt incrementa, inveniendi. *Quo autem facilius hae rationes colligi, atque in calculo repraesentari possint, haec ipsa incrementa evanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quae cum quantitate destituantur, infinite parva quoque dicuntur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda, ut omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur. Ita si quantitati* x *incrementum tribuatur* ω, *ut abeat in* $x+\omega$, *eius quadratum* xx *abibit in* $xx+2x\omega+\omega\omega$, *ideoque incrementum capit* $2x\omega+\omega\omega$; *quare incrementum ipsius* x, *quod est* ω, *se habebit ad incrementum quadrati, quod est* $2x\omega+\omega\omega$, *uti* 1 *ad* $2x+\omega$; *quae ratio abit in* 1 *ad* $2x$, *tum demum, cum* ω *evanescit. Fiat igitur* $\omega=0$; *& ratio istorum incrementorum evanescentium, quae sola in calculo differentiali spectatur, utique est ut* 1 *ad* $2x$; *neque vicissim haec ratio veritati esset consentanea, nisi revera illud incrementum* ω *evanesceret, penitusque nihilo fieret aequale. Quodsi ergo hoc nihilum per* ω *indicatum referat incrementum quantitatis* x, *quia hoc se* ha-

habet ad incrementum quadrati xx *ut* 1 *ad* 2x, *erit quadrati* xx *incrementum* $= 2x\omega$, *ideoque etiam nihilo aequale; unde simul constat annihilationem horum incrementorum non obstare, quominus eorum ratio, quae est ut* 1 *ad* 2x *sit determinata. Quod nihilum iam hic littera* ω *exhibetur, id in calculo differentiali, quia ut incrementum quantitatis* x *spectatur, signo* dx *repraesentari, eiusque differentiale vocari solet; positoque* dx *loco* ω, *ipsius* xx *differentiale erit* 2xdx. *Simili modo ostenditur fore cubi* x^3 *differentiale* $= 3xxdx$, *& in genere cuiusque dignitatis* x^n *differentiale fore* $= nx^{n-1}dx$. *Quaecunque autem aliae functiones ipsius* x *proponantur, in calculo differentiali regulae traduntur eorum differentialia inveniendi: verum perpetuo tenendum est, cum haec differentialia absolute sint nihila, ex iis nihil aliud concludi, nisi eorum rationes mutuas, quae utique ad quantitates finitas reducuntur. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia Calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes; quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parva non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui Calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite parvarum, quae non penitus evanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur iure est obiectum, rigorem geometricum negligi, & conclusiones inde deductas, propterea quod huiusmodi infinite parva negligerentur, merito esse suspectas: quantumvis enim exigua haec infinitae parva concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul reiiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse. Quam obiectionem perperam eiusmodi exemplis, quibus per calculum differentialem eaedem conclusiones ac per Geometriam elementarem eliciuntur, infringere conantur: nam si ea infinite parva, quae in calculo negliguntur, non sunt nihil, inde necessario*

sario error, isque eo maior, quo magis ea coacervantur, resultare debet; hocque si minus eveniat, id potius vitio calculi, quo nonnunquam errores per alios errores compensantur, esset tribuendum, quam ipse calculus ab erroris suspicione liberaretur. Quodsi autem nullo novo errore huiusmodi compensatio fiat, talibus exemplis luculenter id ipsum, quod volo, evincitur, ea quae fuerint neglecta, omnino & absolute pro nihilo esse habenda; neque infinite parva, quae in calculo differentiali tractantur, a nihilo absoluto discrepare. Minime etiam negotium conficitur, quando a nonnullis infinite parva ita describuntur, ut instar pulvisculorum respectu vasti montis vel etiam totius globi terrestris spectari debeant: etsi enim qui magnitudinem totius globi terrestris calculo determinare susceperit, ei error non unius sed plurium millium pulvisculorum facile condonari soleat; tamen rigor geometricus etiam a tantillo errore abhorret, nimisque gravis esset haec obiectio, si ullam vim retineret. Deinde etiam difficile dictu est, quid lucri inde sperent, qui infinite parva a nihilo distingui volunt: metuunt autem, ne, si plane evanescant, etiam comparatio eorum, ad quam totum negotium perduci sentiunt, tollatur: quomodo enim absolute nihila inter se comparari queant, nullo modo concipi posse profitentur. Necesse ergo putant iis aliquam magnitudinem relinquere, quo habeant aliquid, in quo comparationem instituant: hanc tamen magnitudinem tam parvam admittere coguntur, ut quasi esset nulla, spectari ac sine errore in calculo negligi possit. Neque tamen certam ac definitam ipsi magnitudinem, licet incomprehensibiliter parvam, assignare audent; semper enim si eam bis terve minorem assumerent, eodem modo comparationes se essent habiturae. Ex quo perspicuum est, nihil plane ipsam magnitudinem ad comparationem instituendam conferre, hancque adeo non tolli, etiamsi illa magnitudo penitus evanescat. Ex dictis autem supra manifestum est, eam comparationem, quae in calculo differentiali spectatur, ne locum quidem habere, nisi illa incrementa prorsus evanescant: incrementum enim quanti-

titatis x, *quod in genere indicavimus per* ω, *ad incrementum, quadrati* xx, *quod est* $2x\omega+\omega\omega$, *rationem habet ut* 1 *ad* $2x+\omega$; *quae semper differt a ratione* 1 *ad* 2x, *nisi sit* $\omega=0$; *at si statuamus esse* $\omega=0$, *tum demum vere affirmare possumus; hanc rationem fieri exacte ut* 1 *ad* 2x. *Interim tamen perspicitur, quo minus illud incrementum* ω *accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; unde non solum licet, sed etiam naturae rei convenit, haec incrementa primum ut finita considerare, atque etiam in figuris, si quibus opus est ad rem illustrandam, finite repraesentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, sicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum illorum constituit, verum est obiectum Calculi differentialis; cuius igitur prima fundamenta is iecisse existimandus est, cui primum in mentem venit, has rationes ultimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, & cum evanescunt, tum demum attingunt, contemplari. Huius autem speculationis vestigia deprehendimus apud antiquissimos Auctores, quibus idcirco idea quaedam levisque cognitio Analysis infinitorum abiudicari nequit. Paullatim deinde haec scientia maiora accepit incrementa, neque subito ad id fastigium, in quo nunc cernitur, est evecta; etiamsi quidem in ea multo plura adhuc sint occulta, quam in lucem protracta. Cum enim Calculus differentialis ad omnis generis functiones, utcunque sint compositae, extendatur, non repente methodus innotuit, omnium plane functionum incrementa evanescentia inter se comparandi; sed sensim haec inventio ad functiones continuo magis complicatas processit. Quod scilicet ad functiones rationales attinet, ratio ultima, quam earum incrementa evanescentia inter se tenent, multo ante* NEUTONI *ac* LEIBNIZII *tempora assignari potuit; ita ut Calculus differentialis, quatenus ad solas functiones rationales applicatur, diu ante haec tem-*

pora

pora inventus sit censendus. Tum vero nullum est dubium, quin NEUTONO *eam calculi differentialis partem, quae circa functiones irrationales versatur, acceptam referre debeamus; ad quam insigni suo Theoremate de evolutione generali potestatum binomii feliciter est deductus, quo eximio invento limites calculi differentialis iam mirifice erant amplificati.* LEIBNIZIO *autem non minus sumus obstricti, quod hunc calculum, antehac tantum velut singulare artificium spectatum, in formam disciplinae redegerit, eiusque praecepta tanquam in systema collegerit, ac dilucide explicaverit. Hinc enim maxima subsidia suggerebantur, ad hunc calculum ulterius excolendum, & ea, quae adhuc desiderabantur, ex certis principiis elicienda. Mox igitur studio cum ipsius* LEIBNIZII, *tum* BERNOUILLIORUM *ad hoc ab eo incitatorum, fines Calculi differentialis etiam ad functiones transcendentes, quae pars adhuc fuerat inculta, sunt promoti, tum vero etiam solidissima fundamenta Calculi integralis constituta; quibus insistentes, qui deinceps in hoc genere elaborarunt, continuo maiora incrementa addiderunt.* NEUTONUS *vero etiam amplissima dederat specimina Calculi integralis, cuius prima inventio, cum a prima origine calculi differentialis vix separari queat, non ita absolute constitui potest; & quoniam maxima eius pars adhuc excolenda restat, hic calculus ne nunc quidem pro absolute invento haberi potest; sed potius quantum cuique pro viribus ad eius perfectionem conferre contigerit, id grata mente agnoscere debemus. Atque haec de gloria inventionis huius calculi tenenda esse iudico, de qua quidem antehac tantopere est disceptatum. Quod autem ad varia nomina, quae isti calculo a diversarum nationum Mathematicis imponi solent, attinet, ea omnia huc redeunt, ut cum data hic definitione egregie consentiant: sive enim incrementa illa evanescentia, quorum ratio consideratur, differentialia vocentur, sive fluxiones, ea semper nihilo aequalia sunt intelligenda; in quo vera notio infinite parvorum constitui debet. Hinc vero etiam omnia, quae de differentialibus*

secun-

secundi & altiorum ordinum curiose magis quam utiliter sunt disputata, reddentur planissima, cum omnia per se aeque evanescant neque ea unquam per se, sed potius eorum relatio mutua spectari soleat. Cum enim ratio, quam duarum functionum incrementa evanescentia tenent, iterum per functionem quandam exprimatur, si & huius functionis incrementum evanescens cum aliis conferatur, res ad differentialia secunda referri est censenda; sicque porro progressio ad differentialia altiorum graduum intelligi debet, ita ut semper quantitates finitae revera animo obversentur, signaque differentialium tantum ad eas commode repraesentandas adhibeantur. Primo quidem intuitu ista Analysis infinitorum descriptio plerisque levis ac nimis sterilis videtur, etsi species illa arcana infinite parvorum re haud plus polliceatur: verum si rationes, quae inter incrementa evanescentia functionum quarumvis intercedunt, probe cognoscamus, haec cognitio saepenumero per se maximi est momenti; tum vero in plerisque iisque maxime arduis investigationibus ita est necessaria, ut sine eius adminiculo nihil plane intelligi possit. Veluti si quaestio sit de motu globi ex tormento explosi, simulque ratio resistentiae aeris haberi debeat, quomodo motus per spatium finitum sit futurus, nullo modo statim definire licet, dum tam directio semitae, in qua globus incedit, quam ipsius celeritas, a qua resistentia pendet, quovis momento immutatur. Quo minus autem spatium, per quod motus fiat, consideremus, eo minor erit illa variabilitas, eoque facilius ad cognitionem veri pertingere licebit; quodsi autem illud spatium plane evanescens reddamus, quia iam omnis inaequalitas tam in directione viae quam in celeritate tollitur, effectum resistentiae per regulas motus accurate definire, motusque mutationem puncto temporis productam assignare licebit. Cognitis autem his mutationibus momentaneis, seu potius cum ipsae sint nullae, earum relatione mutua, iam plurimum sumus lucrati; atque calculi integralis opus est, exinde motum per spatium finitum variatum concludere. Minime autem necesse

esse

esse arbitror usum Calculi differentialis atque Analyseos infinitorum in genere pluribus ostendere; cum nunc quidem satis sit exploratum, si vel levissimam investigationem, in quam motus corporum tam solidorum quam fluidorum ingrediatur, accuratius instituere velimus, id non solum non sine Analysi infinitorum praestari posse, sed hanc ipsam scientiam saepe nondum satis excultam esse, ut rem penitus explicare valeamus. Per omnes scilicet Matheseos partes usus huius Analyseos sublimioris usque adeo diffunditur, ut omnia, quae sine eius interventu adhuc expedire licuit, pro nihilo propemodum sint habenda.

Constitui igitur in hoc libro universum Calculum differentialem ex veris principiis derivare, atque ita copiose pertractare, ut nihil praetermitterem eorum, quae quidem adhuc eo pertinentia sunt inventa. In duas opus divisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis methodum exposui omnis generis functiones differentiandi, neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inveniendi; sive functiones unicam variabilem sive duas pluresve involvant. In altera autem parte amplissimum huius calculi usum in ipsa Analysi finitorum ac doctrina serierum exposui; ubi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicavi. De usu autem huius calculi in Geometria linearum curvarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus haec pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiam, cum vix satis essent evoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos purae limites continentur, ut ne ulla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi praecepta explicanda.

INSTITUTIONUM
CALCULI DIFFERENTIALIS
PARS PRIOR

CONTINENS

COMPLETAM HUIUS CALCULI

EXPLICATIONEM





CAPUT I.

DE DIFFERENTIIS FINITIS.



I.

Ex iis, quae in Libro superiori de quantitatibus variabilibus atque functionibus sunt exposita, perspicuum est, prout quantitas variabilis actu variatur, ita omnes eius functiones variationem pati. Sic, si quantitas variabilis x capiat incrementum ω, ita ut pro x scribatur $x + \omega$, omnes functiones ipsius x, cuiusmodi sunt xx; x^3; $\frac{a + x}{xx + aa}$, alios induent valores: scilicet xx abibit in $xx + 2x\omega + \omega\omega$; x^3 abibit in $x^3 + 3xx\omega + 3x\omega\omega + \omega^3$; & $\frac{a + x}{aa + xx}$ transmutabitur in $\frac{a + x + \omega}{aa + xx + 2x\omega + \omega\omega}$.

Huiusmodi ergo alteratio semper orietur, nisi functio speciem tantum quantitatis variabilis mentiatur, revera autem sit quantitas constans, veluti x^0: quo casu talis functio invariata manet, utcunque quantitas x immutetur.

2. Quae cum sint satis exposita, propius accedamus ad eas functionum affectiones, quibus universa analysis infinitorum innititur. Sit igitur y functio quaecunque quantitatis variabilis x: pro qua successive valores in arithmetica progressione procedentes substituantur, scilicet: x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; &c. ac denotet y^{I} valorem quem functio y induit, si in ea loco x substituatur $x+\omega$; simili modo sit y^{II} is ipsius y valor, si loco x scribatur $x+2\omega$; parique ratione denotent y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c. valores ipsius y, qui emergunt dum loco x ponuntur $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c. ita ut isti diversi valores ipsarum x & y sequenti modo sibi respondeant:

$$\begin{array}{llllllll} x; & x+\omega; & x+2\omega; & x+3\omega; & x+4\omega; & x+5\omega; & \&c. \\ y; & y^{I}; & y^{II}; & y^{III}; & y^{IV}; & y^{V}; & \&c. \end{array}$$

3. Quemadmodum series arithmetica x; $x+\omega$; $x+2\omega$; &c. in infinitum continuari potest; ita series ex functione y orta y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque in infinitum progredietur, eiusque natura pendebit ab indole functionis y. Sic, si fuerit $y=x$; vel $y=ax+b$; series y; y^{I}; y^{II}; &c. quoque erit arithmetica: si fuerit $y=\frac{a}{bx+c}$, series prodibit harmonica: si autem sit $y=a^x$, habebitur series geometrica. Neque ulla excogitari potest series, quae non hoc modo ex certa functione ipsius x oriri queat; vocari autem solet huiusmodi functio ipsius x, ratione seriei, quae ex illa oritur, eius TERMINUS GENERALIS; quare cum omnis series certa lege formata, habeat terminum generalem, ea vicissim ex certa ipsius x functione oritur, uti in doctrina de seriebus fusius explicari solet.

4.

4. Hic autem potissimum ad differentias, quibus termini seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. inter se discrepant, attendimus; quas ut ad differentialium naturam accomodemus, sequentibus signis indicemus, ut sit

$$y^{I} - y = \Delta y;\ y^{II} - y^{I} = \Delta y^{I};\ y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II};\ \&c.$$

Exprimet ergo Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x + \omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumtum. In doctrina quidem serierum sumi solet $\omega = 1$; verum hic ad nostrum institutum expedit, valore generali uti, qui pro arbitrio augeri diminuive queat. Vocari quoque solet hoc incrementum Δy functionis y eius DIFFERENTIA, qua sequens valor y^{I} primum y superat, atque perpetuo tanquam incrementum consideratur; etiamsi saepius re vera decrementum exhibeat, id quod ex eius valore negativo agnoscitur.

5. Quoniam y^{II} oritur ex y, si loco x scribatur $x + 2\omega$; manifestum est eandem quantitatem esse orituram si primum pro x ponatur $x + \omega$, tumque denuo $x + \omega$ loco x statuatur. Hinc y^{II} orietur ex y^{I}, si in hoc loco x scribatur $x + \omega$; eritque ideo Δy^{I} incrementum ipsius y^{I} quod capit posito $x + \omega$ loco x; sicque Δy^{I} vocatur simili modo *Differentia* ipsius y^{I}. Pari ratione porro erit Δy^{II} differentia ipsius y^{II}, seu eius incrementum, quod accipit, si loco x ponatur $x + \omega$; atque Δy^{III} erit differentia, seu incrementum ipsius y^{III}, & ita porro. Hoc pacto ex serie valorum ipsius y, qui sunt y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. obtinebitur series differentiarum Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; &c. quae inveniuntur, si quilibet terminus illius seriei a sequente subtrahatur.

6. Inventa serie differentiarum, si ex ea denuo differentiae capiantur, quamlibet a sequente subtrahendo, orientur differentiae differentiarum, quae vocantur *Differentiae secundae*; hocque modo per characteres convenientissime repraesentantur, ut significet:

$\Delta\Delta y$

$$\Delta\Delta y = \Delta y^{I} - \Delta y$$
$$\Delta\Delta y^{I} = \Delta y^{II} - \Delta y^{I}$$
$$\Delta\Delta y^{II} = \Delta y^{III} - \Delta y^{II}$$
$$\Delta\Delta y^{III} = \Delta y^{IV} - \Delta y^{III}$$
&c.

Vocatur itaque $\Delta\Delta y$ differentia ſecunda ipſius y; $\Delta\Delta y^{I}$ differentia ſecunda ipſius y^{I}, & ita porro. Simili autem modo ex differentiis ſecundis, ſi denuo earum differentiae capiantur, prodibunt differentiae tertiae hoc modo ſcribendae $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{I}$; &c. hincque porro differentiae quartae $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{I}$; &c. ſicque ultra quouſque libuerit.

7. Repraeſentemus ſingulas has differentiarum ſeries ita in ſchemate, quo earum nexus facilius in oculos incidat:

PROGRESSIO ARITHMETICA.

x; $x+\omega$; $x+2\omega$; $x+3\omega$; $x+4\omega$; $x+5\omega$; &c.

VALORES FUNCTIONIS.

y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; y^{IV}; y^{V}; &c.

DIFFERENTIAE PRIMAE.

Δy; Δy^{I}; Δy^{II}; Δy^{III}; Δy^{IV}; &c.

DIFF. II. $\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta y^{I}$; $\Delta\Delta y^{II}$; $\Delta\Delta y^{III}$; &c.

DIFF. III. $\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^{I}$; $\Delta^3 y^{II}$; &c.

DIFF. IV. $\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^{I}$; &c.

DIFF. V. $\Delta^5 y$; &c.

&c.

quarum quaelibet ex praecedente oritur, quosque terminos a ſequentibus ſubtrahendo. Quacunque ergo functione ipſius x loco y ſubſtituta, quoniam valores y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. per no-

notas compositiones facile formantur, ex iis sine labore singulae differentiarum series invenientur.

8. Ponamus esse $y = x$; eritque $y^{I} = x^{I} = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$: & ita porro. Unde differentiis sumendis erit $\Delta x = \omega$; $\Delta x^{I} = \omega$; $\Delta x^{II} = \omega$; &c. ideoque omnes differentiae primae ipsius x erunt constantes, ac proinde differentiae secundae omnes evanescent; pariterque differentiae tertiae, & sequentium ordinum omnes. Cum igitur sit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iste character Δx commode adhibebitur. Quantitatis ergo variabilis x, cuius valores successivi x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, &c. arithmeticam progressionem constituere assumuntur, differentiae Δx, Δx^{I}, Δx^{II}, &c. erunt constantes atque inter se aequales; ac propterea erit $\Delta\Delta x = 0$, $\Delta^{3} x = 0$, $\Delta^{4} = 0$, sicque porro

9. Pro valoribus ipsius x, qui ipsi successive tribuuntur, progressionem arithmeticam hic assumsimus, ita ut horum valorum differentiae primae sint constantes, secundae ac reliquae omnes evanescant. Quod etsi ab arbitrio nostro pendet, cum aliam quamcunque progressionem, aeque adhibere potuissemus; tamen progressio arithmetica prae reliquis omnibus commodissime usurpari solet, cum quod sit simplicissima atque intellectu facillima, tum vero maxime, quod ad omnes omnino valores, quos quidem x induere potest, pateat. Tribuendo enim ipsi ω valores tam negativos quam affirmativos, in hac serie valorum ipsius x omnes omnino continentur quantitates reales, quae in locum ipsius x substitui possunt: contra autem si seriem geometricam elegissemus, ad valores negativos nullus aditus patuisset. Hanc ob causam variabilitas functionum y ex valoribus ipsius x progressionem arithmeticam constituentibus aptissime diiudicatur.

10. Uti est $\Delta y = y^{I} - y$, ita differentiae ulteriores quoque ex terminis primae seriei y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. definiri possunt.

Cum

Cum enim ſit $\Delta y^{I} = y^{II} - y^{I}$
erit
$$\Delta\Delta y = y^{II} - 2y^{I} + y$$
&
$$\Delta\Delta y^{I} = y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$$
ideoque
$$\Delta^{3} y = \Delta\Delta y^{I} - \Delta\Delta y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$
ſimili modo erit
$$\Delta^{4} y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$
&
$$\Delta^{5} y = y^{V} - 5y^{IV} + 10y^{III} - 10y^{II} + 5y^{I} - y$$

quarum formularum coefficientes numerici eandem legem tenent, quae in poteſtatibus Binomii obſervatur. Quemadmodum ergo differentia prima ex duobus terminis ſeriei y; y^{I}; y^{II}; y^{III}; &c. determinatur, ita differentia ſecunda determinatur ex tribus, tertia ex quatuor, & ita de ceteris. Cognitis autem differentiis cuiuſque ordinis ipſius y, ſimili modo differentiae omnium ordinum ipſius y^{I}; y^{II}; &c. definientur.

11. Propoſita ergo quacunque Functione y ſingulae eius differentiae, tam prima, quam ſequentes, quae quidem differentiae ω, qua valores ipſius x progrediuntur, reſpondent, poterunt inveniri. Neque vero ad hoc opus eſt, ut ſeries valorum ipſius y ulterius continuetur; quemadmodum enim differentia prima Δy reperitur, ſi in y loco x ſcribatur $x + \omega$, atque a valore orto y^{I} ipſa functio y ſubtrahatur; ita differentia ſecunda $\Delta\Delta y$ obtinebitur ſi in differentia prima Δy loco x ponatur $x + \omega$, ut oriatur Δy^{I}, atque Δy a Δy^{I} ſubtrahatur. Simili modo ſi differentiae ſecundae $\Delta\Delta y$ capiatur differentia, eam ſubtrahendo a valore, quem induit, ſi loco x ponatur $x + \omega$, proveniet differentia tertia $\Delta^{3} y$; hincque porro eodem modo differentia quarta $\Delta^{4} y$, &c. Dummodo ergo quis noverit differentiam primam cuiuſque functionis inveſtigare, ſimul poterit differentiam ſecundam, tertiam,

tiam, omnesque sequentes invenire, propterea quod differentia secunda ipsius y nil aliud est, nisi differentia prima ipsius Δy; & differentia tertia ipsius y nil aliud, nisi differentia prima ipsius $\Delta\Delta y$; sicque porro de reliquis.

12. Si functio y fuerit ex duabus pluribusve partibus composita, ut sit $y = p + q + r +$ &c.; tum quia est $y^{\text{I}} = p^{\text{I}} + q^{\text{I}} + r^{\text{I}} +$ &c., erit differentia $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r +$ &c., similique modo porro $\Delta\Delta y = \Delta\Delta p + \Delta\Delta q + \Delta\Delta r +$ &c., unde inventio differentiarum, si functio proposita ex partibus fuerit composita, non parum facilior redditur. Quod si vero functio y fuerit productum ex duabus functionibus p & q, nempe $y = pq$, quia erit $y^{\text{I}} = p^{\text{I}} q^{\text{I}}$, & $p^{\text{I}} = p + \Delta p$, atque $q^{\text{I}} = q + \Delta q$, fiet $p^{\text{I}} q^{\text{I}} = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q$, hincque $\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q$. Unde, si sit p quantitas constans $= a$, ob $\Delta a = 0$; erit functionis $y = aq$, differentia prima $\Delta y = a\Delta q$, similique modo differentia secunda $\Delta\Delta y = a\Delta\Delta q$, tertia $\Delta^3 q = a\Delta^3 q$, & ita porro.

13. Quoniam omnis functio rationalis integra est aggregatum ex aliquot potestatibus ipsius x; omnes differentias functionum rationalium integrarum invenire poterimus, si differentias potestatum tantum exhibere noverimus. Hancobrem singularum potestatum quantitatis variabilis x differentias investigemus in sequentibus exemplis.

Cum autem sit $x^0 = 1$, erit $\Delta x^0 = 0$; propterea quod x^0 non variatur, etiamsi x abeat in $x + \omega$.

Tum vero vidimus esse $\Delta x = \omega$; & $\Delta\Delta x = 0$, simulque differentiae sequentium ordinum evanescunt. Quae cum sint manifesta a Potestate secunda incipiamus:

EXEMPLUM I.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^2.

Cum hic sit $y = x^2$, erit $y^{\text{I}} = (x + \omega)^2$, ideoque $\Delta y = 2\omega x + \omega\omega$; quae est differentia prima. Iam ob ω

quantitatem constantem, erit $\Delta\Delta y = 2\,\omega\omega$, & $\Delta^3 y = 0$; $\Delta^4 y = 0$; &c.

EXEMPLUM II.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^3.

Ponatur $y = x^3$; &, cum sit $y^I = (x+\omega)^3$,

erit

$$\Delta y = 3\,\omega xx + 3\,\omega^2 x + \omega^3$$

quae est differentia prima. Deinde ob

$$\Delta.\, xx = 2\,\omega x + \omega\omega$$

erit

$$\Delta.\, 3\,\omega xx = 6\,\omega\omega x + 3\,\omega^3$$

&

$$\Delta.\, 3\,\omega^2 x = 3\,\omega^3; \quad \& \quad \Delta.\, \omega^3 = 0:$$

quibus collectis erit

$$\Delta\Delta y = 6\,\omega^2 x + 6\,\omega^3: \quad \text{atque} \quad \Delta^3 y = 6\,\omega^3:$$

Differentiae vero sequentes evanescent.

EXEMPLUM III.

Invenire differentias omnium ordinum potestatis x^4.

Posito $y = x^4$; ob $y^I = (x+\omega)^4$

erit

$$\Delta y = 4\,\omega x^3 + 6\,\omega^2 x^2 + 4\,\omega^3 x + \omega^4;$$

quae est differentia prima. Tum ex praecedentibus est:

$$\Delta.\, 4\,\omega x^3 = 12\,\omega^2 x^2 + 12\,\omega^3 x + 4\,\omega^4$$
$$\Delta.\, 6\,\omega^2 x^2 = \ldots\ 12\,\omega^3 x + 6\,\omega^4$$
$$\Delta.\, 4\,\omega^3 x = \ldots\ldots + 4\,\omega^4$$
$$\Delta.\, \omega^4 = \ldots\ldots\ldots\ 0$$

His colligendis erit differentia secunda:

$$\Delta\Delta y = 12\,\omega^2 x^2 + 24\,\omega^3 x + 14\,\omega^4:$$

Quia deinde porro est:

$$\Delta.\, 12\,\omega^2 x^2 = 24\,\omega^3 x + 12\,\omega^4$$
$$\Delta.\, 24\,\omega^3 x = \ldots\ 24\,\omega^4$$
$$\Delta.\, 14\,\omega^4 = \ldots\ldots\ 0$$

pro-

prodibit differentia tertia:

$\Delta^3 y = 24\omega^3 x + 36\omega^4$

atque tandem differentia quarta:

$$\Delta^4 y = 24\omega^4$$

quae cum sit constans, differentiae sequentium ordinum evanescent.

EXEMPLUM IV.

Invenire differentias cuiusvis ordinis potestatis x^n.

Ponatur $y = x^n$; &c, cum sit $y^{\mathrm{I}} = (x + \omega)^n$; $y^{\mathrm{II}} = (x + 2\omega)^n$; $y^{\mathrm{III}} = (x + 3\omega)^n$; &c. Potestates evolutae dabunt:

$y = x^n$

$y^{\mathrm{I}} = x^n + \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$

$y^{\mathrm{II}} = x^n + \frac{n}{1}2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}4\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}8\omega^3 x^{n-3} + \&c.$

$y^{\mathrm{III}} = x^n + \frac{n}{1}3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}9\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}27\omega^3 x^{n-3} + \&c.$

$y^{\mathrm{IV}} = x^n + \frac{n}{1}4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}16\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}64\omega^3 x^{n-3} + \&c.$

Hinc, differentiis sumendis, prodibit:

$\Delta y = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\omega^3 x^{n-3} + \&c.$

$\Delta y^{\mathrm{I}} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}3\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}7\omega^3 x^{n-3} + \&c.$

$$\Delta y^{II} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} 5\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} 19\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

$$\Delta y^{III} = \frac{n}{1}\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} 7\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} 37\omega^3 x^{n-3} + \&c.$$

sumantur denuo differentiae, atque obtinebitur:

$$\Delta\Delta y = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} 6\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 14\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{I} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} 12\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 50\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta\Delta y^{II} = n(n-1)\omega^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} 18\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 110\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

Ex his per subtractionem ulterius eruitur

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 36\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y^{I} = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 60\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

atque porro

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

14. Quo lex, secundum quam istae differentiae potestatis

x^n

x^n progrediuntur, facilius perspiciatur, ponamus primo brevitatis ergo:

$$A = \frac{n}{1}$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

&c.

Deinde sequens formetur Tabula, quae pro singulis differentiis inserviet.

y	1;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0	;&c.
Δy	0;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1;	1	;&c.
$\Delta^2 y$	0;	0;	2;	6;	14;	30;	62;	[illegible];	254	;&c.
$\Delta^3 y$	0;	0;	0;	6;	36;	150;	540;	18[illegible];	5796	;&c.
$\Delta^4 y$	0;	0;	0;	0;	24;	240;	1560;	8400;	40824	;&c.
$\Delta^5 y$	0;	0;	0;	0;	0;	120;	1800;	16800;	126000	;&c.
$\Delta^6 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	720;	15120;	191520	;&c.
$\Delta^7 y$	0;	0;	0;	0;	0;	0;	0;	5040;	141120	;&c.

in qua Tabula numerus cuiusvis seriei invenitur, si eiusdem seriei praecedens ad numerum supra positum addatur, atque summa per indicem characteri Δ infixum multiplicetur. Sic, in serie differentiae $\Delta^5 y$ respondente, terminus 16800 invenitur, si praecedens 1800 ad supra scriptum 1560 addatur, atque summa 3360 per 5 multiplicetur.

15. Tabula ergo hac constituta, singulae differentiae Potestatis $x^n = y$ sequenti modo se habebunt:

$$\Delta y = A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \&c.$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \&c.$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \&c.$$

Generatim autem potestatis x^n differentia ordinis m, seu $\Delta^m y$, sequenti modo exprimetur.

Sit

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots m};$$

$$K = \frac{n-m}{m+1} I;$$

$$L = \frac{n-m-1}{m+2} K;$$

$$M = \frac{n-m-2}{m+3} L;$$

&c.

Deinde vero sit:

$$\alpha = m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot2}(m-2)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}(m-3)^m + \&c.$$

$$\beta = m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot2}(m-2)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}(m-3)^{m+1} + \&c.$$

$$\gamma = m^{m+2} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\cdot2}(m-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}(m-3)^{m+2} + \&c.$$

quibus valoribus inventis erit

$$\Delta^m y = \alpha I\omega^m x^{n-m} + \beta K\omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L\omega^{m+2} x^{n-m-2} \&c.$$

cu-

cuius expressionis ratio ex modo, quo singulae differentiae ex valoribus y, y', y'', y''', &c. eliciuntur, sponte sequitur.

16. Ex his perspicuum est, si esponens n fuerit numerus integer affirmativus, tandem ad differentias perveniri constantes, hisque ulteriores omnes esse $= 0$. Sic erit

$$\Delta.\, x = \omega$$
$$\Delta^2.\, x^2 = 2\omega^2$$
$$\Delta^3.\, x^3 = 6\omega^3$$
$$\Delta^4.\, x^4 = 24\omega^4$$

& tandem

$$\Delta^n.\, x^n = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n.\ \omega^n$$

Omnis ergo functio rationalis integra tandem ad differentias constantes deducetur. Scilicet, functio ipsius x primi gradus, $ax + b$ differentiam primam iam habet constantem $= a\omega$. Functio secundi gradus $axx + bx + c$ differentiam secundam habebit constantem $= 2a\omega\omega$; functionis autem tertii gradus differentia tertia erit constans; quarti quarta, & ita porro.

17. Modus autem, quo invenimus differentias potestatis x^n, quoque latius patet, atque ad eas potestates, quarum exponens n est numerus negativus, vel fractus, vel adeo irrationalis, extenditur. Quod quo clarius appareat, differentias tantum primas praecipuarum huiusmodi potestatum exhibebimus, quoniam lex differentiarum secundarum ac sequentium non tam facile cernitur: erit ergo,

$$\Delta.\, x = \omega$$
$$\Delta.\, x^2 = 2\omega x + \omega^2$$
$$\Delta.\, x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$$
$$\Delta.\, x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4 \ \&c.$$

Simili modo vero erit

Δ.

$$\Delta. x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \ldots\ldots \&c.$$

$$\Delta. x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \ldots\ldots \&c.$$

$$\Delta. x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \ldots\ldots \&c.$$

$$\Delta. x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \ldots\ldots \&c.$$

Et inde pro reliquis. Pariter erit

$$\Delta. x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \ldots\ldots \&c.$$

$$\Delta. x^{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \ldots\ldots \&c.$$

$$\Delta. x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \ldots \&c.$$

$$\Delta. x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \ldots \&c.$$

18. Apparet itaque has differentias, si exponens ipsius x non fuerit numerus integer affirmativus, in infinitum progredi, seu ex terminorum numero infinito constare. Interim tamen eaedem differentiae quoque per expressionem finitam exhiberi possunt. Cum enim, posito

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, sit $y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{x+\omega}$, erit $\Delta. x^{-1} = \Delta. \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$;

un-

unde, si fractio $\frac{1}{x+\omega}$ in seriem convertatur, prodit expressio superior. Simili modo erit

$$\Delta. x^{-2} = \Delta. \frac{1}{xx} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{xx},$$

atque pro irrationalibus erit

$$\Delta. \sqrt{x} = \sqrt{(x+\omega)} - \sqrt{x}, \ \& \ \Delta. \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\omega)}} - \frac{1}{\sqrt{x}};$$

quae formulae si more solito in series explicentur, superiores expressiones praebent.

19. Hoc vero modo quoque differentiae functionum, sive fractarum sive irrationalium, inveniri possunt: sic si quaeratur differentia prima fractionis $\frac{1}{aa+xx}$ ponatur $y = \frac{1}{aa+xx}$; &, quia est $y^{I} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega^2}$ erit

$$\Delta y = \Delta. \frac{1}{aa+xx} = \frac{1}{aa+xx+2\omega x+\omega\omega} - \frac{1}{aa+xx},$$

quae expressio quoque in seriem infinitam converti potest.

Ponatur $aa+xx = P$, & $2\omega x + \omega\omega = Q$;

erit

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

&

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \&c.$$

Restitutis ergo loco P & Q valoribus erit:

$$\Delta y = \Delta. \frac{1}{aa+xx} = -\frac{2\omega x+\omega\omega}{(aa+xx)^2} + \frac{4\omega\omega xx + 4\omega^3 x + \omega^4}{(aa+xx)^3}$$
$$- \frac{8\omega^3 x^3 + 12\omega^4 x^2 + 6\omega^5 x + \omega^6}{(aa+xx)^4} + \&c.$$

qui termini si secundum potestates ipsius ω ordinentur erit:

$$\Delta.\frac{1}{aa+xx}=-\frac{2\omega x}{(aa+xx)^2}+\frac{\omega^2(3xx-aa)}{(aa+xx)^3}-\frac{4\omega^3(x^3-aax)}{(aa+xx)^4}+\&c.$$

20. Similibus seriebus infinitis differentiae functionum irrationalium quoque exprimi possunt.

Sit proposita ista functio $y=\surd(aa+xx)$;

&, cum sit $y^I=\surd(aa+xx+2\omega x+\omega\omega)$,

ponatur $aa+xx=P$, & $2\omega x+\omega\omega=Q$

$$\text{erit } \Delta y=\surd(P+Q)-\surd P=\frac{Q}{2\surd P}-\frac{QQ}{8P\surd P}+\frac{Q^3}{16PP\surd P}-\&c.$$

unde fiet

$$\Delta y=\Delta.\surd(aa+xx)=\frac{2\omega x+\omega\omega}{2\surd(aa+xx)}-\frac{4\omega^2x^2+4\omega^3x+\omega^4}{8(aa+xx)\surd(aa+xx)}+\&c.$$

vel

$$=\frac{\omega x}{\surd(aa+xx)}+\frac{aa\omega^2}{2(aa+xx)\surd(aa+xx)}-\frac{aa\omega^3x}{2(aa+xx)^2\surd(aa+xx)}\&c.$$

Hincque adeo colligimus functionis cuiuscunque ipsius x, quae sit y, differentiam hac forma exprimi posse, ut sit

$$\Delta y=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+\&c.$$

existentibus P, Q, R, S, &c. certis ipsius x functionibus, quae quovis casu ex functione y definiri possunt.

21. Neque etiam ex hac forma differentiae functionum transcendentium excluduntur, id quod ex sequentibus exemplis clarius apparebit.

EXEMPLUM I.

Invenire differentiam primam logarithmi hyperbolici ipsius x.

Ponatur $y=lx$; & cum sit $y^I=l(x+\omega)$,

erit

erit

$$\Delta y = y^{I} - y = l(x+\omega) - lx = l\left(1+\frac{\omega}{x}\right).$$

Huiusmodi autem logarithmum supra docuimus per seriem infinitam exprimere; qua adhibita, erit

$$\Delta y = \Delta . lx = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2xx} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \&c.$$

EXEMPLUM II.

Invenire differentiam primam quantitatis exponentialis a^x.

Posito $y = a^x$ erit $y^{I} = a^{x+\omega} = a^x . a^{\omega}$: at supra ostendimus esse

$$a^{\omega} = 1 + \frac{\omega l a}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \&c.$$

quo valore introducto erit

$$\Delta . a^x = y^{I} - y = \Delta y = \frac{a^x \omega la}{1.} + \frac{a^x \omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{a^x \omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \&c.$$

EXEMPLUM III.

In circulo, cuius radius $= 1$, invenire differentiam sinus arcus x.

Sit $\sin x = y$, erit $y^{I} = \sin(x+\omega)$, unde $\Delta y = y^{I} - y = \sin(x+\omega) - \sin x$. At est $\sin(x+\omega) = \cos\omega . \sin x + \sin\omega . \cos x$, atque per series infinitas ostendimus esse,

$$\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

&

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

quibus feriebus fubftitutis erit:

$$\Delta.\sin x = \omega.\cos x - \frac{\omega^2}{2}\sin x - \frac{\omega^3}{6}\cos x + \frac{\omega^4}{24}\sin x + \frac{\omega^5}{120}\cos x - \&c.$$

EXEMPLUM IV.

In circulo cuius radius $= 1$ *invenire differentiam cofinus arcus* x.

Pofito $y = \cos x$, ob $y^1 = \cos(x+\omega)$
erit $y^1 = \cos\omega.\cos x - \sin\omega.\sin x$
& $\Delta y = \cos\omega.\cos x - \sin\omega.\sin x - \cos x$
Seriebus ergo ante expofitis adhibendis prodibit:

$$\Delta.\cos x = -\omega\sin x - \frac{\omega^2}{2}\cos x + \frac{\omega^3}{6}\sin x + \frac{\omega^4}{24}\cos x - \frac{\omega^5}{120}\sin x - \&c.$$

22. Cum igitur propofita quacunque functione ipfius x, five algebraica five tranfcendente, quae fit y, eius differentia prima eiufmodi habeat formam ut fit:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

fi huius differentia denuo capiatur, patebit differentiam fecundam ipfius y huiufmodi formam effe habituram:

$$\Delta\Delta y = P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \&c.$$

fimilique modo differentia tertia ipfius y, erit huiufmodi

$$\Delta^3 y = P\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \&c.$$

ficque porro.

Ubi notandum eft litteras P, Q, R, &c. hic non pro valoribus determinatis adhiberi, neque eadem littera in diverfis differentiis eandem functionem ipfius x denotari: ideo enim tantum iifdem litteris utor, ne fufficiens diverfarum litterarum numerus deficiat.

Ceterum *iftae differentiarum formae* probe funt *notandae*, cum in Analyfi infinitorum maximum ufum offerant.

23.

23. Cum igitur modum expoſuerim, quo cuiuſvis functionis differentia prima, ex eaque porro differentiae ſequentium ordinum inveniri queant; quippe quae ex valoribus functionis y ſucceſſivis y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, &c. reperiuntur: viciſſim ex differentiis ipſius y cuiuſque ordinis datis, iſti ipſi variati valores ipſius y elici poterunt. Erit enim

$$y^{I} = y + \Delta y$$
$$y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y$$
$$y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta^3 y$$
$$y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta\Delta y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$
&c.

ubi coefficientes numerici iterum ex evolutione binomii naſcuntur. Quemadmodum ergo y^{I}, y^{II}, y^{III}, &c. ſunt valores ipſius y, qui oriuntur ſi loco x ſucceſſive ponantur hi valores $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, &c. ſtatim valorem ipſius $y^{(n)}$ aſſignare poterimus, qui prodit ſi loco x ſcribatur $x+n\omega$, erit ſcilicet iſte valor:

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 y + \&c.$$

Hincque adeo etiam valores ipſius y praeberi poſſunt ſi n fuerit numerus negativus. Sic, ſi loco x ponatur $x-\omega$, functio y abibit in hanc formam:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \&c.$$

ſin autem loco x ponatur $x - 2\omega$, functio y tranſibit in:

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \&c.$$

24. Pauca quaedam addamus de methodo inverſa, qua, ſi detur differentia, ex ea ipſa illa functio, cuius eſt differentia, inveſtigari debeat. Cum autem hoc ſit difficillimum atque ſaepe numero ipſam analyſin infinitorum requirat, caſus

ſus tantum quoſdam faciliores evolvamus. Primum igitur, regrediendo, ſi functionis cuiuſpiam differentiam invenerimus, viciſſim hac differentia propoſita, ipſa illa functio, unde eſt nata, exhiberi poterit. Sic, cum functionis $ax+b$ differentia ſit $a\omega$, ſi quaeratur cuiuſnam functionis differentia ſit $a\omega$; reſponſio erit in promtu, eam functionem eſſe $ax+b$. In hac igitur reperitur quantitas conſtans b, quae in differentia non inerat, & quae propterea ab arbitrio noſtro pendet. Perpetuo autem ſi functionis cuiuſvis P differentia fuerit Q, quoque functionis $P+A$, (denotante A quantitatem quamcunque conſtantem,) differentia erit Q. Hinc, ſi iſta differentia Q proponatur, functio, ex qua ea eſt orta, erit $P+A$, atque idcirco determinatum valorem non habet, cum conſtans A ab arbitrio pendeat.

25. Vocemus eam functionem quaeſitam cuius differentia proponitur, SUMMAM; quod nomen commode adhibetur, cum quod ſumma differentiae opponi ſolet, tum etiam, quod functio quaeſita revera ſit ſumma omnium valorum praecedentium differentiae. Quemadmodum enim eſt $y^{I}=y+\Delta y$, & $y^{II}=y+\Delta y+\Delta y^{I}$, ſi valores ipſius y retro continuentur; ita, ut is, qui valori $x-\omega$ reſpondet, ſcribatur y_{I}, huncque praecedens y_{II}, & qui ultra praecedunt y_{III}, y_{IV}, y_{V}, &c. hincque ſeries formetur retrograda, cum ſuis differentiis:

$$y_{V};\ y_{IV};\ y_{III};\ y_{II};\ y_{I};\ y$$

&

$$\Delta y_{V};\ \Delta y_{IV};\ \Delta y_{III};\ \Delta y_{II};\ \Delta y_{I}$$

erit

$$y=\Delta y_{I}+y_{I}$$

&

ob $y_{I}=\Delta y_{II}+y_{II}$, porroque $y_{II}=\Delta y_{III}+y_{III}$

erit utique

$$y=\Delta y_{I}+\Delta y_{II}+\Delta y_{III}+\Delta y_{IV}+\Delta y_{V}$$

&c.

ſic-

ſicque erit functio y, cuius differentia eſt Δy, ſumma omnium valorum antecedentium differentiae Δy, qui oriuntur, ſi loco x ſcribantur valores antecedentes $x-\omega$; $x-2\omega$; $x-3\omega$; &c.

26. Quemadmodum ad differentiam denotandam uſi ſumus ſigno Δ, ita ſummam indicabimus ſigno Σ: ſcilicet, ſi functionis y differentia fuerit z, erit $z=\Delta y$; unde, ſi y detur, differentiam z invenire ante docuimus. Quod ſi autem data ſit differentia z, eiuſque ſumma y reperiri debeat, fiet $y=\Sigma z$; atque adeo, ex aequatione $z=\Delta y$ regrediendo, formabitur haec aequatio $y=\Sigma z$; ubi conſtans quantitas quaecunque adiici poterit ob rationes ſupra datas; ex quo, aequatio $z=\Delta y$, ſi invertatur, dabit quoque $y=\Sigma z+C$. Deinde, cum quantitatis ay differentia ſit $a\Delta y=az$, erit $\Sigma az=ay$, ſi quidem a ſit quantitas conſtans. Quia ergo eſt $\Delta x=\omega$; erit $\Sigma\omega=x+C$ & $\Sigma a\omega=ax+C$; atque ob ω quantitatem conſtantem, erit $\Sigma\omega^2=\omega x+C$; $\Sigma\omega^3=\omega^2 x+C$; & ita porro.

27. Si igitur differentias poteſtatum ipſius x ſupra inventas invertamus, erit

$$\Sigma\omega = x;\quad \text{hincque}\quad \Sigma 1 = \frac{x}{\omega};$$

Deinde habemus

$$\Sigma\,(2\omega x+\omega^2) = x^2;$$

unde fit

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \Sigma\frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Porro eſt

$$\Sigma\,(3\omega xx + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3$$

ſeu $$3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma 1 = x^3$$

ergo $$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega\Sigma x - \frac{\omega^2}{3}\Sigma 1$$

ſeu $$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$$

ſimi-

simili modo erit

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2}\sum x^2 - \omega^2 \sum x - \frac{\omega^3}{4}\sum 1$$

ubi, si loco $\sum x^2$, $\sum x$ & $\sum 1$ valores ante inventi substituantur, reperietur:

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega xx}{4}.$$

Deinde, cum sit

$$\sum x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega\sum x^3 - 2\omega^2\sum x^2 - \omega^3\sum x - \frac{\omega^4}{5}\sum 1$$

erit, adhibendis substitutionibus:

$$\sum x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

simili modo ulterius progrediendo reperietur

$$\sum x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}\omega x^4 - \frac{1}{12}\omega^3 x^2$$

&

$$\sum x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}\omega x^5 - \frac{1}{6}\omega^3 x^3 + \frac{1}{42}\omega^5 x$$

quas expressiones infra facilius invenire docebimus.

28. Si ergo differentia proposita fuerit functio rationalis integra ipsius x, eius summa, (seu ea functio, cuius ea est differentia) ex his formulis facile invenitur. Quia enim differentia ex aliquot potestatibus ipsius x constabit, quaeratur uniuscuiusque termini summa, omnesque istae summae colligantur.

EXEM-

EXEMPLUM I.

Quaeratur functio, cuius differentia sit $= axx + bx + c$.

Quaerantur singulorum terminorum summae ope formularum ante inventarum, erit

$$\Sigma axx = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{axx}{2} + \frac{a\omega x}{6}$$

& $$\Sigma bx = \;.\;.\; \frac{bxx}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

atque $$\Sigma c = \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{cx}{\omega}$$

Hinc colligendo has summas erit

$$\Sigma(axx + bx + c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{(a\omega - b)}{2\omega}x^2 + \frac{(a\omega^2 - 3b\omega + 6c)}{6\omega}x + C$$

quae est functio quaesita, cuius differentia est $axx + bx + c$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur functio, cuius differentia est $x^4 - 2\omega^2 xx + \omega^4$.

Operationem simili modo instituendo habebitur.

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\omega x^3 - \frac{1}{30}\omega^3 x$$

&

$$-\Sigma 2\omega^2 x^2 = \;.\; -\frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2 x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

atque

$$+\Sigma\omega^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \omega^3 x$$

unde functio quaesita erit:

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2 x^2 + \frac{19}{30}\omega^3 x + C$$

D Si

Si enim hic loco x ponatur $x + \omega$, atque a quantitate resultante subtrahatur ista inventa, remanebit proposita differentia $x^4 - 2\omega^2 x^2 + \omega^4$.

29. Si summas, quas pro potestatibus ipsius x invenimus, attentius inspiciamus, in terminis primis, secundis, ac tertiis mox quidem legem observabimus, qua illi secundum singulas potestates progrediuntur: reliquorum autem terminorum lex non ita est perspicua, ut summam potestatis x^n in genere inde colligere liceat. Interim tamen in sequentibus docebitur esse:

$$\Sigma x^n =$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2.3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2.3.4.5}x^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}x^{n-5}$$

$$- \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-6)\omega^7}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 8.\ 9}x^{n-7}$$

$$+ \frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-8)\omega^9}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 10.\ 11}x^{n-9}$$

$$- \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-10)\omega^{11}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 12.\ 13}x^{n-11}$$

$$+ \frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-12)\omega^{13}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 14.\ 15}x^{n-13}$$

$$- \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-14)\omega^{15}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 16.\ 17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-16)\omega^{17}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 18.\ 19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-18)\omega^{19}}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ 20.\ 21}x^{n-19}$$

$+$

$$+\frac{854513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-20)\omega^{21}}{2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;22\;.\;23}x^{n-21}$$

$$-\frac{1181820455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;(n-22)\omega^{23}}{2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;24\;.\;25}x^{n-23}$$

$$+\frac{76977927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-24)\omega^{25}}{2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;26\;.\;27}x^{n-25}$$

$$-\frac{23749461029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;(n-26)\omega^{27}}{2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;28\;.\;29}x^{n-27}$$

$$+\frac{8615841276005}{462}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;(n-28)\omega^{29}}{2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;30\;.\;31}x^{n-29}$$

&c. + C.

cuius progressionis praecipuum momentum in coefficientibus mere numericis est situm, qui quemadmodum formentur, hic locus nondum est, ubi exponi queat.

30. Apparet autem nisi n sit numerus integer affirmativus, hanc summae expressionem in infinitum progredi, neque hoc modo summam in forma finita exhiberi posse. Ceterum hic notandum est, non omnes potestates ipsius x proposita x^n inferiores occurrere; desunt enim termini x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}, &c. quippe quorum coefficientes sunt $=0$, etiamsi termini secundi x^n coefficiens hanc legem non sequatur, sed sit $=-\frac{1}{2}$. Poterunt ergo huius espressionis ope summae potestatum, quarum exponentes sunt vel negativi vel fracti in forma infinita exhiberi solo excepto casu quo $n=-1$, quia tum fit terminus $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ ob $n+1=0$ infinitus. Sic, posito $n=-2$; erit

$$\Sigma \frac{1}{xx} = C - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2xx} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{3x^3} + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\omega^3}{5x^5}$$

$$- \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\omega^5}{7x^7} + \tfrac{3}{10}\cdot\frac{\omega^7}{9x^9} - \tfrac{5}{6}\cdot\frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210}\cdot\frac{\omega^{11}}{13x^{13}}$$

$$- \tfrac{35}{2}\cdot\frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3617}{30}\cdot\frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \&c.$$

31. Si ergo differentia proposita fuerit poteſtas ipſius x quaecumque, eius ſumma hinc perpetuo aſſignari, ſeu functio, cuius ea ſit differentia, exhiberi poterit. Sin autem differentia propoſita aliam habeat formam, ut in poteſtates ipſius x, tanquam partes, diſtribui nequeat, tum ſumma difficillime ac ſaepenumero prorſus non inveniri poteſt: niſi forte pateat, eam ex quapiam functione eſſe ortam. Hanc ob cauſam conveniet plurium functionum differentias inveſtigare eaſque probe notare, ut ſi quando huiuſmodi differentia proponatur, eius ſumma, ſeu functio unde eſt orta, ſtatim exhiberi queat. Interim tamen methodus infinitorum plures regulas ſuppeditabit, quarum ope inventio ſummarum mirifice ſublevabitur.

32. Facilius autem ſaepe ex differentia propoſita reperitur ſumma quaeſita, ſi haec ex factoribus ſimplicibus conſtet, qui progreſſionem arithmeticam conſtituant, cuius differentia ſit ipſa quantitas ω. Sic, ſi propoſita fuerit functio $(x+\omega)(x+2\omega)$, eius differentia quaeratur: quia, poſito $x+\omega$ loco x, haec functio abit in $(x+2\omega)(x+3\omega)$, eius differentia erit $2\omega(x+2\omega)$. Quare viciſſim, ſi proponatur differentia $2\omega(x+2\omega)$, eius ſumma erit $(x+\omega)(x+2\omega)$, hinc ergo erit

$$\Sigma(x+2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega).$$

Si-

Simili modo, si proponatur functio $(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum sit eius differentia $2\omega(x+(n+1)\omega)$ erit

$$\Sigma(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

&

$$\Sigma(x+n\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega).$$

33. Si functio ex pluribus factoribus constet, ut sit $y=(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, cum sit

$$y^1=(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

erit

$$\Delta y=3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

ac propterea

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

Pari modo reperietur esse:

$$\Sigma(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)=$$
$$\frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega).$$

unde lex inveniendi summas, si differentia ex pluribus huiusmodi factoribus constet, sponte patet. Quamvis autem hae differentiae sint functiones rationales integrae, tamen earum summae hoc modo facilius reperiuntur, quam per methodum praecedentem.

34. Hinc quoque via patet ad differentiarum fractarum summas inveniendas. Sit enim proposita fractio

$$y=\frac{1}{x+n\omega};\text{ quia erit } y^1=\frac{1}{x+(n+1)\omega}$$

erit

erit

$$\Delta y = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$$

ac propterea

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega} = -\frac{1}{\omega}\cdot\ \frac{1}{x+n\omega}$$

Sit porro

$$y = \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)}$$

ob $y^{1} = \dfrac{1}{(x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}$

erit

$$\Delta y = \frac{-2\omega}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}$$

Hinc ideo fiet

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{2\omega}\cdot \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)}$$

Simili modo erit porro

$$\Sigma \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)\ (x+(n+3)\omega)}$$

$$= \frac{-1}{3\omega}\cdot\ \frac{1}{(x+n\omega)\ (x+(n+1)\omega)\ (x+(n+2)\omega)}.$$

35. Modus iste summandi probe est tenendus, quia huiusmodi differentiarum summae per praecedentem methodum inveniri non possunt. Quodsi autem differentia insuper ha-

habeat numeratorem, vel factores denominatoris non in arithmetica progressione procedant, tum tutissimus modus investigandi summas est, ut differentia proposita in suas fractiones simplices resolvatur, quarum singulae etsi summari nequeunt, tamen binis coniungendis toties summa inveniri potest, quoties id quidem fieri licet, tantum enim erit dispiciendum, utrum summa ope huius formulae inveniri queat:

$$\Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \frac{1}{x+n\omega}$$

etsi enim neutra harum summarum per se exhiberi potest, tamen earum differentia cognoscitur.

36. His igitur casibus negotium redit ad resolutionem cuiusque fractionis in fractiones suas simplices, quae in superiori libro fusius est ostensa. Quemadmodum ergo eius beneficio summae inveniri queant, aliquot exemplis docebimus.

EXEMPLUM I.

Quaeratur summa, cuius differentia sit

$$\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}$$

Resolvatur haec differentia proposita in suas fractiones simplices, quae erunt

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega} - \frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Cum iam sit ex superiori formula:

$$\Sigma \frac{1}{x+n\omega} = \Sigma \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega}$$

erit $$\Sigma \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x}$$

Hinc erit summa quaesita

$$\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}=$$

$$\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{\omega x}$$

at eſt

$$\Sigma\frac{1}{x+\omega}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{x+\omega};$$

unde ſumma quaeſita erit

$$-\frac{1}{\omega x}-\frac{2}{\omega(x+\omega)}=\frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

EXEMPLUM II.

Quaeratur ſumma, cuius differentia eſt $\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}$.

Poſita hac differentia $=z$, erit $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3\omega}$

ideoque

$$\Sigma z=\Sigma\frac{1}{x}-\Sigma\frac{1}{x+3\omega}=\Sigma\frac{1}{x+\omega}-$$

$$\Sigma\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+2\omega}-\Sigma\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x+2\omega}.$$

quae eſt ſumma quaeſita. Quoties ergo hoc modo ſigna ſummatoria Σ ſeſe tandem tollunt, toties differentiae propoſitae ſumma exhiberi poterit; ſin autem haec deſtructio non ſuccedat, ſignum hoc eſt, ſummam inveniri non poſſe.

CA-

CAPUT II.

DE USU DIFFERENTIARUM IN DOCTRINA SERIERUM.

37.

Naturam ſerierum per differentias maxime illuſtrari, ex primis rudimentis ſatis eſt notum. Progreſſionis enim arithmeticae, quae primum conſiderari ſolet, praecipua proprietas in hoc verſatur, ut eius differentiae primae ſint inter ſe aequales; hinc differentiae ſecundae ac reliquae omnes erunt cyphrae. Dantur deinde ſeries, quarum differentiae ſecundae demum ſunt aequales, quae hanc ob rem *ſecundi ordinis* commode appellantur, dum progreſſiones arithmeticae ſeries *primi ordinis* vocantur. Porro igitur ſeries *tertii ordinis* erunt, quarum differentiae tertiae ſunt conſtantes, atque ad *quartum ordinem* &c. ſequentes eae referentur ſeries, quarum differentiae quartae, & ulteriores demum ſunt conſtantes.

38. In hac diviſione infinita ſerierum genera comprehenduntur, neque tamen omnes ſeries ad haec genera revocare licet. Occurrunt enim innumerabiles ſeries, quae, differentiis ſumendis, nunquam ad terminos conſtantes deducunt: cuiuſmodi, praeter innumeras alias ſunt progreſſiones geometricae, quae nunquam praebent differentias conſtantes, uti ex hoc exemplo videre licet.

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\quad 128,\quad \&c.$$
$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\quad \&c.$$
$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad \&c.$$

Cum enim ſeries differentiarum cuiuſque ordinis aequalis ſit ipſi ſeriei propoſitae, aequalitas differentiarum prorſus excluditur. Quocirca plures ſerierum claſſes conſtitui debebunt,

quarum una tantum in hos ordines, qui tandem ad differentias constantes revocantur, subdividitur; quam classem in hoc capite potissimum considerabimus.

39. Duae autem res ad naturam serierum cognoscendam imprimis requiri solent, Terminus generalis atque Summa seu Terminus summatorius. Terminus generalis est expressio indefinita, quae unumquemque seriei terminum complectitur, atque eiusmodi propterea est functio quantitatis variabilis x, quae, posito $x = 1$, terminum seriei primum exhibet; secundum vero posito $x = 2$; tertium posito $x = 3$; quartum posito $x = 4$; & ita porro. Cognito ergo termino generali, quotuscumque seriei terminus invenietur, etiamsi lex, qua singuli termini cohaerent, non respiciatur. Sic verbi gratia ponendo $x = 1000$, statim terminus millesimus cognoscetur. Ita huius seriei

$$1, \quad 6, \quad 15, \quad 28, \quad 45, \quad 66, \quad 91, \quad 120, \quad \&c.$$

Terminus generalis est $2xx - x$; posito enim $x = 1$, haec formula dat terminum primum 1; posito $x = 2$, oritur terminus secundus 6; si ponatur $x = 3$, oritur tertius 15; &c. unde patet huius seriei terminum centesimum, posito $x = 100$ fore $= 2.10000 - 100 = 19900$.

40. Indices seu exponentes in qualibet serie vocantur numeri, qui indicant quotus quisque terminus sit in ordine: sic, termini primi index erit 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro. Hinc indices singulis cuiusque seriei terminis inscribi solent, hoc modo

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

TERMINI.

A, B, C, D, E, F, G, &c.

unde statim patet G esse seriei propositae terminum septimum, cum eius index sit 7. Hinc terminus generalis nil aliud erit, nisi terminus seriei, cuius index vel exponens est

nu-

numerus indefinitus x. Quemadmodum ergo in quolibet ſerierum ordine, quarum differentiae vel primae, vel ſecundae, vel aliae ſequentes ſunt conſtantes, terminum generalem inveniri oporteat, primum docebimus: tum vero ad inveſtigationem ſummae ſummus progreſſuri.

41. Incipiamus ab ordine primo, qui continet progreſſiones arithmeticas, quarum differentiae primae ſunt conſtantes; ſitque a terminus ſeriei primus, & b terminus primus ſeriei differentiarum, cui ſequentes omnes ſunt aequales: unde ſeries ita erit comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6,

TERMINI.

a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$, &c.

DIFFERENTIAE.

b, b, b, b, b, &c.

Ex qua ſtatim patet, terminum, cuius index ſit $=x$, fore $a+(x-1)b$, eritque ergo terminus generalis $=bx+a-b$, qui ex terminis primis cum ipſius ſeriei, tum ſeriei differentiarum componitur. Quodſi autem terminus ſecundus ſeriei $a+b$ vocetur a^1, ob $b=a^1-a$, erit terminus generalis $=(a^1-a)x+2a-a^1=a^1(x-1)-a(x-2)$ unde ex cognitis terminis primo & ſecundo progreſſionis arithmeticae, eius terminus generalis formabitur.

42. Sint in ſerie ſecundi ordinis termini primi, ipſius ſeriei $=a$; differentiarum primarum $=b$; differentiarum ſecundarum $=c$; eritque ipſa ſeries cum ſuis differentiis ita comparata.

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

TERMINI.

$a; a+b; a+2b+c; a+3b+3c; a+4b+6c; a+5b+10c; a+6b+15c;$ (&c.

DIFFER. I.

$b; b+c; b+2c; b+3c; b+4c; b+5c;$ &c.

DIFFER. II.

$c, c, c, c, c,$ &c.

ex cuius inſpectione liquet terminum, cuius index $=x$ fore $= a+(x-1)b+\frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}c$; qui ergo eſt terminus generalis ſeriei propoſitae. Ponatur autem ipſius ſeriei terminus ſecundus $=a^{I}$, terminus tertius $=a^{II}$, cum ſit $b=a^{I}-a$; & $c=a^{II}-2a^{I}+a$; uti ex natura differentiarum (§. 10.) intelligitur, erit terminus generalis

$$a+(x-1)(a^{I}-a)+\frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(a^{II}-2a^{I}+a)$$

qui reducitur ad hanc formam

$$\frac{a^{II}(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}-\frac{2 \cdot a^{I}(x-1)(x-3)}{1 \cdot 2}+\frac{a(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$$

vel etiam ad hanc

$$\frac{a^{II}}{2}(x-1)(x-2)-\frac{2a^{I}}{2}(x-1)(x-3)+\frac{a}{2}(x-2)(x-3)$$

aut denique ad hanc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{II}}{x-3}-\frac{2a^{I}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right);$$

ideoque ex tribus terminis ipſius ſeriei definitur.

43. Sit ſeries tertii ordinis $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, &c. eius differentiae primae $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$, &c. & differentiae

tiae secundae c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, &c. & tertiae d, d, d, &c. quippe quae sunt constantes.

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	
Termini	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	&c.
Differ. I.	b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	&c.	
Differ. II.	c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	&c.		
Differ. III.	d,	d,	d,	&c.			

Quia est $a^{I} = a + b$; $a^{II} = a + 2b + c$, $a^{III} = a + 3b + 3c + d$; $a^{IV} = a + 4b + 6c + 4d$; &c. erit terminus generalis, seu is cuius index est x,

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$

Sicque terminus generalis ex differentiis formabitur.

Cum autem porro sit

$$b = a^{I} - a;\ c = a^{II} - 2a^{I} + a;\ d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$

si hi valores substituantur erit terminus generalis

$$a^{III} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3a^{II} \frac{(x-1)(x-2(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ 3a^{I} \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - a \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

qui etiam hoc modo exprimetur, ut sit

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{a^{III}}{x-4} - \frac{3a^{II}}{x-3} + \frac{3a^{I}}{x-2} - \frac{a}{x-1} \right).$$

44. Sit nunc series cuiuscunque ordinis proposita:

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	
Termini	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	&c.
Differ. I.	b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	&c.	
Differ. II.	c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	&c.		

Dif-

Differ. III. d, d^{I}, d^{II}, &c.

Differ. IV. e, e^{I}, &c.

Differ. V. f, &c.

ex ipſius ſeriei termino primo, atque ex differentiarum terminis primis b, c, d, e, f, &c. terminus generalis ita exprimetur ut ſit:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d +$$
$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \&c.$$

donec ad differentias conſtantes perveniatur. Ex quo patet, ſi nunquam prodeant differentiae conſtantes, terminum generalem per expreſſionem infinitam exhiberi.

45. Quia differentiae ex ipſis terminis ſeriei formantur, ſi earum valores ſubſtituantur, prodibit terminus generalis in eiuſmodi forma expreſſus, cuiuſmodi pro ſeriebus primi, ſecundi, & tertii ordinis exhibuimus. Scilicet, pro ſeriebus ordinis quarti, erit terminus generalis

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times$$
$$\left(\frac{a^{IV}}{x-5} - \frac{4a^{III}}{x-4} + \frac{6a^{II}}{x-3} - \frac{4a^{I}}{x-2} + \frac{a}{x-1}\right)$$

unde lex, qua ſequentium ordinum termini generales componuntur, facile perſpicitur. Ex his autem patet pro quovis ordine terminum generalem fore functionem ipſius x rationalem integram, in qua maxima ipſius x dimenſio congruat cum ordine, ad quem ſeries refertur. Ita ſerierum primi ordinis erit terminus generalis functio primi gradus, ſecundi ordinis ſecundi gradus, & ita porro.

46.

46. Differentiae autem, uti supra vidimus, ex ipsis terminis seriei ita resultant, ut sit

$$b = a^{I} - a$$
$$b^{I} = a^{II} - a^{I}$$
$$b^{II} = a^{III} - a^{II}$$
&c.
$$c = a^{II} - 2a^{I} + a$$
$$c^{I} = a^{III} - 2a^{II} + a^{I}$$
$$c^{II} = a^{IV} - 2a^{III} + a^{II}$$
&c.
$$d = a^{III} - 3a^{II} + 3a^{I} - a$$
$$d^{I} = a^{IV} - 3a^{III} + 3a^{II} - a^{I}$$
$$d^{II} = a^{V} - 3a^{IV} + 3a^{III} - a^{II}$$
&c.

Quare cum in seriebus primi ordinis sint omnes valores ipsius $c = 0$; erit
$a^{II} = 2a^{I} - a$; $a^{III} = 2a^{II} - a^{I}$; $a^{IV} = 2a^{III} - a^{II}$; &c.
unde patet has series simul esse recurrentes, & scalam relationis esse $2, -1$. Deinde, cum in seriebus secundi ordinis sint omnes valores ipsius $d = 0$, erit
$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$; $a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$; &c.
ideoque & hae erunt recurrentes scala relationis existente
$$3, -3, +1.$$
Simili modo apparebit omnes huius classis series, cuiuscunque sint ordinis, simul ad classem serierum recurrentium pertinere, atque ita quidem, ut scala relationis constet ex coefficientibus potestatis binomii, uno gradu superioris, quam est ordo, ad quem series refertur.

47. Quia vero pro seriebus primi ordinis quoque omnes valores ipsius d & e, & sequentium differentiarum omnium sunt $= 0$, erit quoque in his

$$a^{III} = 3a^{II} - 3a^{I} + a$$
$$a^{IV} = 3a^{III} - 3a^{II} + a^{I}$$
&c.

aut

aut $$a^{IV} = 4a^{III} - 6a^{II} + 4a^{I} - a$$
$$a^{V} = 4a^{IV} - 6a^{III} + 4a^{II} - a^{I}$$
&c.

Pertinebunt ergo & hinc ad ſeries recurrentes idque infinitis modis, cum ſcalae relationis eſſe queant:

$3, -3, +1$; $4, -6, +4, -1$; $5, -10, +10, -5, +1$;
&c.

Similique modo intelligitur unamquamque ſeriem huius, quam tractamus, claſſis ſimul eſſe ſeriem recurrentem innumeris modis: ſcala enim relationis erit

$$\frac{n}{1}, -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}, +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}, -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$

dummodo n ſit numerus integer maior, quam numerus quo ordo indicatur. Orietur ergo haec ſeries quoque ex evolutione fractionis, cuius denominator eſt $(1-y)^n$, prouti in ſuperiori libro de ſeriebus recurrentibus fuſius eſt oſtenſum.

48. Quemadmodum vidimus, omnium huius claſſis ſerierum, cuiuſcunque ſint ordinis, terminos generales eſſe functiones ipſius x rationales integras, ita viciſſim apparebit omnes ſeries, quarum termini generales ſint huiuſmodi functiones ipſius x, ad hanc claſſem pertinere, atque tandem ad differentias conſtantes perduci. Et quidem, ſi terminus generalis fuerit functio primi gradus $ax+b$, dum ſeries inde orta erit primi ordinis ſeu arithmetica, differentias primas habebit conſtantes. Sin autem terminus generalis fuerit functio ſecundi gradus in hac forma $axx+bx+c$ contenta, tum ſeries ex eo oriunda, dum loco x ſucceſſive numeri $1, 2, 3, 4, 5,$ &c. ſubſtituuntur, erit ordinis ſecundi, atque differentias ſecundas habebit conſtantes: ſimili modo, terminus generalis tertii gradus ax^3+bx^2+cx+d dabit ſeriem tertii ordinis atque ita porro.

49. Ex termino enim generali non ſolum omnes ſeriei termini inveniuntur, ſed etiam ſeries differentiarum tam prima-

marum quam ſequentium deduci poſſunt. Cum enim, ſi ſeriei terminus primus ſubtrahatur a ſecundo, prodeat ſeriei differentiarum terminus primus: ſecundus autem, ſi ipſius ſeriei terminus ſecundus a tertio auferatur, ita ſeriei differentiarum obtinebitur terminus, cuius index eſt x, ſi ipſius ſeriei terminus, cuius index eſt x, ſubtrahatur a ſequente cuius index eſt $x+1$. Quare ſi in termino ſeriei generali loco x ponatur $x+1$, ab hocque valore terminus generalis ſubtrahatur, remanebit terminus generalis ſeriei differentiarum: ſi igitur X fuerit ſeriei terminus generalis, erit eius differentia ΔX, (quae modo in praecedente capite oſtenſo invenietur, ſi ſtatuatur ibi $\omega = 1$) terminus generalis ſeriei differentiarum primarum. Simili igitur modo erit $\Delta\Delta X$ terminus generalis ſeriei differentiarum ſecundarum; $\Delta^3 X$ tertiarum, ſicque deinceps.

50. Quodſi autem terminus generalis X fuerit functio rationalis integra, in qua maximus exponens poteſtatis ipſius x ſit n, ex capite praecedente colligitur, eius differentiam ΔX fore functionem uno gradu inferiorem, nempe gradus $n-1$. Hincque porro $\Delta\Delta X$ erit functio gradus $n-2$, & $\Delta^3 X$ functio gradus $n-3$, & ita porro. Quare, ſi X fuerit functio primi gradus, uti $ax+b$, tum eius differentia ΔX erit conſtans $= a$; quae cum ſit terminus generalis ſeriei primarum differentiarum, perſpicitur ſeriem, cuius terminus generalis X ſit functio primi gradus, fore arithmeticam ſeu primi ordinis. Simili modo ſi terminus generalis X fuerit functio ſecundi gradus ob $\Delta\Delta X$ conſtantem, ſeries inde orta differentias ſecundas habebit conſtantes, eritque propterea ordinis ſecundi; ſicque perpetuo, cuius gradus fuerit functio X terminum generalem conſtituens, eiuſdem ordinis erit ſeries ex eo nata.

51. Hanc ob rem ſeries poteſtatum numerorum naturalium ad differentias conſtantes perveniunt, uti ex ſequenti ſchemate fit manifeſtum.

POTEST. I.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, &c.
Differ. I.	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, &c.	

POTEST. II.

	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64, &c.
Differ. I.	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15, &c.	
Differ. II.	2,	2,	2,	2,	2,	2, &c.		

POTEST. III.

	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343, &c.
Differ. I.	7,	19,	37,	61,	91,	127, &c.	
Differ. II.	12,	18,	24,	30,	36, &c.		
Differ. III.	6,	6,	6,	6, &c.			

POTEST. IV.

	1,	16,	81,	256,	625,	1296,	2401, &c.
Differ. I.	15,	65,	175,	369,	671,	1105, &c.	
Differ. II.	50,	110,	194,	302,	434, &c.		
Differ. III.	60,	84,	108,	132, &c.			
Differ. IV.	24,	24,	24, &c.				

Quae igitur in capite praecedente de differentiis cuiusque ordinis inveniendis sunt praecepta, ea hic inservient ad terminos generales differentiarum quarumvis, quae ex seriebus nascuntur, inveniendos.

52. Si terminus generalis cuiusquam seriei fuerit cognitus, eius ope non solum omnes eius termini in infinitum inveniri, sed etiam series retro continuari, eiusque termini, quorum exponentes sint numeri negativi, exhiberi poterunt, loco x numeros negativos substituendo: sic, si terminus generalis fuerit $\frac{xx+3x}{2}$ ponendo loco x tam negativos quam affirmativos indices, series utrinque continuata erit huiusmodi.

INDICES.

&c. $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ &c.

SERIES.

&c. $+5, +2, 0, -1, -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27,$ &c.

Differ. I. $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ &c.

Differ. II. $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$ &c.

Cum igitur ex differentiis terminus generalis formetur, quaeque series ex differentiis retro continuari poterit; ita quidem, ut, si differentiae tandem fiant constantes, hi termini finite exhiberi, contra vero per expressionem infinitam assignari queant: Quin etiam ex termino generali, ii termini, quorum indices sunt fracti, definientur, in quo serierum INTERPOLATIO continetur.

53. His de termino serierum generali monitis, progrediamur ad summam, seu terminum summatorium serierum cuiusque ordinis investigandum. Proposita autem quacumque serie, TERMINUS *summatorius* est functio ipsius x, quae aequalis est summae tot terminorum seriei, quot unitates continet numerus x. Ita ergo terminus summatorius erit comparatus, ut si ponatur $x = 1$, prodeat terminus primus seriei; sin autem ponatur $x = 2$, ut prodeat summa primi & secundi, facto autem $x = 3$, summa primi, secundi ac tertii; sicque deinceps. Hinc, si ex serie proposita nova series formetur, cuius primus terminus aequalis sit primo illius, secundus aequalis summae duorum, tertius aequalis summae trium, atque ita porro, haec nova series vocatur illius *summatrix*, huiusque seriei summatricis terminus generalis erit terminus summatorius seriei propositae: ex quo inventio termini summatorii ad inventionem termini generalis revocatur.

54. Sit ergo series proposita haec

$$a, \; a^{I}, \; a^{II}, \; a^{III}, \; a^{IV}, \; a^{V}, \; \&c.$$

huiusque seriei summatrix sit

$$A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \&c.$$

erit ex eius natura modo expoſita:

$$\begin{aligned} A &= a \\ A^{I} &= a + a^{I} \\ A^{II} &= a + a^{I} + a^{II} \\ A^{III} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} \\ A^{IV} &= a + a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Hinc ſeriei ſummatricis differentiae erunt:

$$A^{I} - A = a^{I};\ A^{II} - A^{I} = a^{II};\ A^{III} - A^{II} = a^{III};\ \&c.$$

unde ſeries propoſita termino primo minuta erit ſeries differentiarum primarum ſeriei ſummatricis. Quod ſi igitur ſeriei ſummatrici praefigatur terminus $= 0$, ut habeatur:

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ A^{V},\ \&c.$$

huius ſeries primarum differentiarum erit ipſa ſeries propoſita:

$$a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ a^{V},\ \&c.$$

55. Hanc ob rem ſeriei propoſitae differentiae primae, erunt differentiae ſecundae ſummatricis, atque differentiae ſecundae illius erunt differentiae tertiae huius, tertiae autem illius quartae huius, atque ita porro. Quare, ſi ſeries propoſita tandem habeat differentias conſtantes, tunc etiam eius ſummatrix ad differentias conſtantes deducetur, eritque igitur ſeries eiuſdem naturae, at uno ordine ſuperior. Huiuſmodi ergo ſerierum perpetuo terminus ſummatorius exhiberi poterit per expreſſionem finitam. Namque terminus generalis ſeriei:

$$0,\ A,\ A^{I},\ A^{II},\ A^{III},\ A^{IV},\ \&c.$$

ſeu is, qui indici x convenit exhibebit ſummam $x - 1$ terminorum ſeriei huius a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, &c. atque ſi tum loco x ſcribatur $x + 1$, orietur ſumma x terminorum, ipſeque terminus ſummatorius.

56. Sit igitur ſeriei propoſitae

a,

$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}$, &c.

Series differentiarum primarum

$b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}$, &c.

Series differentiarum secundarum

$c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}$, &c.

Series differentiarum tertiarum

$d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}$, &c.

sicque porro donec ad differentias constantes perveniatur. Deinde formetur series summatrix, quae cum praefixa o in locum termini primi, cum suis differentiis continuis se habebit sequenti modo:

INDICES.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

SUMMATRIX.

o, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}, &c.

SERIES PROPOSITA.

	a,	a^{I},	a^{II},	a^{III},	a^{IV},	a^{V},	a^{VI},	&c.
Differ. I.	b,	b^{I},	b^{II},	b^{III},	b^{IV},	b^{V},	b^{VI},	&c.
Differ. II.	c,	c^{I},	c^{II},	c^{III},	c^{IV},	c^{V},	c^{VI},	&c.
Differ. III.	d,	d^{I},	d^{II},	d^{III},	d^{IV},	d^{V},	d^{VI},	&c.

erit seriei summatricis terminus generalis, seu qui indici x respondet

$$o+(x-1)a+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}b+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}c+\&c.$$

qui simul exhibet summam $x-1$ terminorum seriei propositae, $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$, &c.

57. Quod si ergo in hac summa loco $x-1$ scribatur x, prodibit seriei propositae terminus summatorius summam x terminorum complectens

$$= x a + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \&c.$$

Hinc, si litterae b, c, d, e, valores ipsis assignatos retineant, erit

SERIEI.

$$a, \quad a^{I}, \quad a^{II}, \quad a^{III}, \quad a^{IV}, \quad a^{V}, \quad \&c.$$

TERMINUS GENERALIS.

$$a + (x-1) b + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e + \&c.$$

ET TERMINUS SUMMATORIUS.

$$x a + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} b + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \&c.$$

Invento ergo seriei cuiusvis ordinis hoc, quem ostendimus, modo termino generali, non difficulter ex eo terminus summatorius reperietur, quippe qui ex iisdem differentiis conflatur.

58. Hic modus terminum summatorium per differentias seriei inveniendi imprimis ad eiusmodi series, quae tandem ad differentias constantes deducunt, est accomodatus; in aliis enim casibus expressio finita non reperitur. Quodsi autem ea, quae ante de indole termini summatorii sunt exposita, attentius perpendamus, alius modus se offert terminum summatorium immediate ex termino generali inveniendi, qui multo latius patet, atque in infinitis casibus ad expressiones finitas deducit, quibus prior modus infinitas exhibet. Sit enim proposita series quaecunque.

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad \&c.$$

cuius terminus generalis, seu indici x respondens sit $= X$; terminus autem summatorius sit $= S$, qui cum summam tot terminorum ab initio exhibeat, quot numerus x continet unitates, erit summa $x - 1$ terminorum $= S - X$; eritque adeo

adeo X differentia expressionis $S - X$, cum relinquatur, si haec a sequente S subtrahatur.

59. Cum igitur sit $X = \Delta(S - X)$ differentia eo modo sumta, quem capite praecedente docuimus, hoc tantum discrimine, ut quantitas illa constans ω hic nobis sit $= 1$. Quare, si ad summas regrediamur, erit $\Sigma X = S - X$, ideoque terminus summatorius quaesitus

$$S = \Sigma X + X + C.$$

Quaeri ergo debet summa functionis X methodo ante tradita, ad eamque addi ipse terminus generalis X, eritque aggregatum terminus summatorius. Quoniam autem in summis sumendis involvitur quantitas constans, sive addenda sive subtrahenda; ea ad praesentem casum accomodari debebit. Manifestum autem est, si ponatur $x = 0$, quo casu numerus terminorum summandorum est nullus, summam quoque fore nullam; ex quo quantitas illa constans C ita determinari debebit, ut posito $x = 0$, fiat quoque $S = 0$. Positis ergo in illa aequatione $S = \Sigma X + X + C$ tam $S = 0$, quam $x = 0$, valor ipsius C invenietur.

60. Quoniam ergo hic totum negotium ad summationem functionum supra monstratam reducitur, ponendo $\omega = 1$, exinde depromamus summationes traditas; ac primo quidem pro potestatibus ipsius x erit

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x$$
$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x$$
$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$
$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$
$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x$$

quibus accenseatur summatio generalis potestatis x^n §. 29. tradita, dummodo ibi ubique loco ω unitas scribatur. Harum ergo formularum ope omnium serierum, quarum termi-

ni generales sunt functiones rationales integrae ipsius x, termini summatorii expedite inveniri poterunt.

61. Denotet S.X terminum summatorium seriei, cuius terminus generalis est $= X$; eritque, ut vidimus,

$$S.X = \Sigma X + X + C$$

dummodo constans C ita assumatur, ut terminus summatorius S.X evanescat posito $x = 0$. Hinc igitur terminos summatorios serierum potestatum, seu quarum termini generales comprehenduntur in hac forma x^n exprimamus. Posito itaque

$$S.x^n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n$$

erit

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \tfrac{1}{2}.\frac{n}{2.3}x^{n-1} - \tfrac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}x^{n-3}$$

$$+ \tfrac{1}{6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}x^{n-5} - \tfrac{3}{10}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-6)}{2.\ 3\ \ldots\ 8.\ 9}x^{n-7}$$

$$+ \tfrac{5}{6}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-8)}{2.\ 3.\ 4\ \ldots\ 10.11}x^{n-9} - \tfrac{691}{210}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-10)}{2.\ 3\ \ldots\ 12.\ 13}x^{n-11}$$

$$+ \tfrac{35}{2}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-12)}{2.\ 3\ \ldots\ 14.\ 15}x^{n-13} - \tfrac{3617}{30}.\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{2.3\ \ldots\ 16.17}x^{n-15}$$

$$+ \frac{43867}{42}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ (n-16)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ 18.\ 19}x^{n-17}$$

$$- \frac{1222277}{110}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ (n-18)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ 20.\ 21}x^{n-19}$$

$$+ \frac{854513}{6}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ (n-20)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ 22.\ 23}x^{n-21}$$

$$- \frac{1181820455}{546}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ (n-22)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ 24.\ 25}x^{n-23}$$

$$+ \frac{76977927}{2}.\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ (n-24)}{2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ 26.\ 27}x^{n-25}$$

&c.

62. Hinc ergo ſummae pro variis ipſius n valoribus ita ſe habebunt.

$S.x^0 = x$

$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$

$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$

$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$

$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{40}x^2$

$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$

$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2$

$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x$

$S.x^{13} = \frac{1}{14}x^{14} + \frac{1}{2}x^{13} + \frac{13}{12}x^{12} - \frac{143}{60}x^{10} + \frac{143}{28}x^8 - \frac{143}{20}x^6 + \frac{65}{12}x^4 - \frac{691}{420}x^2$

$S.x^{14} = \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{13} - \frac{91}{30}x^{11} + \frac{143}{18}x^9 - \frac{143}{10}x^7 + \frac{91}{6}x^5 - \frac{691}{9}x^3 + \frac{7}{6}x$

$S.x^{15} = \frac{1}{16}x^{16} + \frac{1}{2}x^{15} + \frac{5}{4}x^{14} - \frac{91}{24}x^{12} + \frac{143}{12}x^{10} - \frac{429}{16}x^8 + \frac{455}{12}x^6 - \frac{691}{24}x^4 + \frac{35}{4}x^2$

$S.x^{16} = \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{2}x^{16} + \frac{4}{3}x^{15} - \frac{14}{3}x^{13} + \frac{52}{3}x^{11} - \frac{143}{3}x^9 + \frac{260}{3}x^7 - \frac{1382}{15}x^5 + \frac{140}{3}x^3 - \frac{3617}{510}x$

&c.

quae ſummae ex forma generali uſque ad poteſtatem vigeſi-

mam nonam continuari possunt. Atque adhuc ulterius progredi liceret, si coefficientes illi numerici ulterius essent eruti.

63. Ceterum, in his formulis lex quaedam observatur, cuius ope quaelibet ex praecedente facile inveniri potest, excepto tantum termino ultimo, si in eo potestas ipsius x prima contineatur: tum enim in summa sequente unus terminus insuper accedit. Hoc autem omisso, si fuerit

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7} + \eta x^{n-9} - \&c.$$

erit sequens summa:

$$S.x^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2} + \frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1} + \frac{n+1}{n}\gamma x^n - \frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2} + \frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4} - \frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6} + \frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8} - \&c.$$

unde si n fuerit numerus par, sequens summa vera prodit: at si n fuerit numerus impar, tum in sequente summa praeterea desiderabitur terminus ultimus, cuius forma erit $\pm \phi x$. Interim tamen hic sine aliis subsidiis ita inveniri poterit. Cum enim si ponatur $x = 1$, summa unici tantum termini, (hoc est terminus primus, qui erit $= 1$) oriri debeat: ponatur in omnibus terminis iam inventis $x = 1$, ipsaque summa statuatur $= 1$, quo facto valor ipsius ϕ elicietur, eoque invento ulterius progredi licebit. Atque hoc pacto omnes istae summae inveniri potuissent. Sic, cum sit

$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$

erit $S.x^6 = \frac{6}{7}.\frac{1}{6}x^7 + \frac{6}{6}.\frac{1}{2}x^6 + \frac{6}{5}.\frac{5}{12}x^5 - \frac{6}{3}.\frac{1}{12}x^3 + \phi x$

seu $S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \phi x.$

Ponatur nunc $x = 1$, fiet $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \phi$ ideoque $\phi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, uti ex forma generali invenimus.

64. Ope harum formularum summatoriarum nunc facile omnium serierum, quarum termini generales sunt functiones ipsius x rationales integrae, termini summatorii inveniri po-

poterunt, hocque multo expeditius, quam praecedente methodo per differentias.

EXEMPLUM I.

Invenire terminum summatorium huius seriei
2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, &c.
cuius terminus generalis est $\frac{3xx+x}{2}$.

Cum terminus generalis constet duobus membris, quaeratur pro utroque terminus summatorius ex formulis superioribus

$$S.\tfrac{3}{2}xx = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$
& $$S.\tfrac{1}{2}x = \ldots \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}x$$

eritque $S.\frac{3xx+x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + xx + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2$

qui est terminus summatorius quaesitus. Sic, si ponatur $x = 5$, erit $\frac{5}{2}.6^2 = 90$, summa quinque terminorum $2+7+15+26+40 = 90$.

EXEMPLUM II.

Invenire terminum summatorium seriei
1, 27, 125, 343, 729, 1331, &c.
quae continet cubos numerorum imparium.

Terminus generalis huius seriei est
$= (2x-1)^3 = 8x^3 - 12xx + 6x - 1$,
unde terminus summatorius sequenti modo colligetur.

$$+\ 8.\ S.x^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$
& $$-\ 12.\ S.x^2 = .\ - 4x^3 - 6x^2 - 2x$$
atque $$+\ 6.\ S.x = \ldots + 3x^2 + 3x$$
denique $$-\ 1.\ S.x^0 = \ldots\ldots - x.$$

Erit scilicet summa quaesita $= 2x^4 - x^2 = xx(2xx-1)$.
Uti, si ponatur $x=6$ erit $36.71 = 2556$ summa sex terminorum seriei propositae $= 1+27+125+343+729+1331 = 2556$.

65. Quod si terminus generalis fuerit productum ex

factoribus simplicibus, tum terminus summatorius facilius reperietur per ea, quae supra §. 32. & sequentibus sunt tradita. Cum enim, posito $\omega = 1$, sit

$$\Sigma\,(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n-1)(x+n)$$

$$\&\quad \Sigma\,(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)$$

$$\&\quad \Sigma\,(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

&c.

si ad has summas ipsos terminos generales addamus, simulque constantem adiiciamus, quae posito $x = 0$, reddat terminum summatorium evanescentem, sequentes obtinebimus terminos summatorios

$$S.(x+n) = \tfrac{1}{2}(x+n)(x+n+1) - \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

$$\&\quad S.(x+n)(x+n+1) = \tfrac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2) - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\&\quad S.(x+n)(x+n+1)(x+n+2) = \tfrac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3) - \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

sicque porro.

Si ergo fuerit vel $n = 0$ vel $n = -1$, quantitas constans in his summis evanescit.

66. Seriei ergo 1, 2, 3, 4, 5, &c. cuius terminus generalis est $= x$, terminus summatorius erit $= \tfrac{1}{2}x(x+1)$ seriesque summatrix haec: 1, 3, 6, 10, 15, &c. cuius porro terminus summatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, & series summatrix haec: 1, 4, 10, 20, 35, &c. Haec vero denuo terminum summatorium habebit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, qui erit terminus generalis seriei 1, 5, 15, 35, 70, &c. huiusque terminus summatorius erit $= \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$;

Hae autem series prae reliquis probe sunt notandae, quoniam earum ubique amplissimus est usus. Ex his enim desumuntur coefficientes binomii ad dignitates elevati, qui quam late pateant, cuique in his rebus parum versato abunde constat.

67. Ex his etiam illi termini summatorii, quos ante ex differentiis elicuimus, facile inveniuntur. Cum enim ibi terminum generalem sequenti forma invenerimus expressum

$$a+\frac{(x-1)}{1}b+\frac{(x-1)(x-2)}{1.\ 2.}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3}d+\&c.$$

si cuiusque membri terminum summatorium quaeramus eosque omnes addamus, habebimus terminum summatorium huic termino generali convenientem. Sic cum sit

$$S\ 1 = x$$

& $S\,(x-1) = \frac{1}{2}\,x(x-1)$

atque $S\,(x-1)(x-2) = \frac{1}{3}\,x(x-1)(x-2)$

& $S\,(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{1}{4}\,x(x-1)(x-2)(x-3)$

&c.

erit terminus summatorius quaesitus:

$$xa+\frac{x(x-1)}{1.\ 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}d+\&c$$

quae forma non discrepat ab ea, quam ante ex differentiis obtinuimus.

68. Deinde etiam haec terminorum summatoriorum inventio ad fractiones accomodari potest: quia enim supra §. 34. invenimus esse, ponendo $\omega = 1$

$$\Sigma\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1.\frac{1}{x+n}$$

erit $$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = -1.\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{n+1}$$

Simili modo, si ad summas supra inventas ipsos terminos generales addamus, seu quod idem est, si in illis expressionibus loco x ponamus $x+1$ habebimus

$$S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

& $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} =$

$-\frac{1}{3}.\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}+\frac{1}{3}.\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

quae formae facile pro lubitu ulterius continuantur.

69. Quia erit $S.\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n+1}$

erit quoque $S.\frac{1}{x+n}-S.\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n+1}$: etsi ergo neuter horum duorum terminorum summatoriorum seorsim exhiberi potest, tamen eorum differentia cognoscitur; hincque in pluribus casibus summae serierum satis expedite assignantur: id quod usu venit, si terminus generalis fuerit fractio, cuius denominator in factores simplices resolvi potest. Tum enim tota fractio in fractiones partiales resolvatur; quo facto, ope huius lemmatis mox patebit, utrum terminus summatorius exhiberi queat nec ne.

EXEMPLUM I.

Invenire terminum summatorium seriei huius:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+$ &c.

cuius terminus generalis est $=\frac{2}{xx+x}$.

Terminus iste generalis per resolutionem reducitur ad hanc formam $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}$. Hinc terminus summatorius erit $=2S.\frac{1}{x}-2S.\frac{1}{x+1}$, qui ergo per praecedens lemma erit $=2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}$. Sic, si sit $x=4$, erit $\frac{8}{5}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$.

EXEMPLUM II.

Quaeratur terminus summatorius seriei huius: $\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}$, &c.

cuius terminus generalis est $=\frac{1}{4xx+4x-3}$.

Quia termini generalis denominator habet factores $2x-1$ & $2x+3$, is resolvetur in has partes:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

At est $\quad S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$

& $\quad S.\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

ergo $\quad S.\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-S.\frac{1}{x+\frac{3}{2}}=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}$

cuius pars octava dabit terminum summatorium quaesitum nempe

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8x+4}-\frac{1}{8x+12}=\frac{x}{4x+2}+\frac{x}{3(4x+6)}=\frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

70. Quoniam numeri figurati, quos coefficientes binomii ad dignitates evecti praebent, prae ceteris notari merentur, summas serierum exhibeamus, quarum numeratores sint $=1$, denominatores vero numeri figurati; id quod ex §. 68. facile fiet. Seriei ergo cuius

Terminus generalis est	Terminus summatorius erit
$\frac{1\cdot 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1}$
$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2}-\frac{1\cdot 3}{(x+1)(x+2)}$
$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3}-\frac{1\cdot 2\cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$
&c.	&c.

un-

unde lex, qua iſtae expreſſiones progrediuntur, ſponte apparet. Neque vero hinc terminus ſummatorius, qui conveniat termino generali $\frac{1}{x}$, colligi poteſt, quippe qui per formulam definitam exprimi nequit.

71. Quoniam terminus ſummatorius praebet ſummam tot terminorum, quot unitates continentur in indice x; manifeſtum eſt harum ſerierum in infinitum continuatarum ſummas obtineri, ſi ponatur index x infinitus: quo caſu expreſſionum modo inventarum termini poſteriores, ob denominatores in infinitum abeuntes, evaneſcent. Hinc iſtae ſeries infinitae finitas habebunt ſummas, quae erunt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \&c. = \frac{2}{1}$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \&c. = \frac{3}{2}$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \&c. = \frac{4}{3}$$
$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \&c. = \frac{5}{4}$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} + \frac{1}{210} + \&c. = \frac{6}{5}$$
&c.

Omnium ergo ſerierum, quarum termini ſummatorii habentur, in infinitum continuatarum ſummae exhiberi poterunt poſito $x = \infty$, dummodo hoc caſu ſummae fiant finitae: quod quidem evenit, ſi in termino ſummatorio x tot habeat dimenſiones in denominatore, quot habet in numeratore.

CA-

CAPUT III.
DE INFINITIS ATQUE INFINITE PARVIS.

72.

Cum omnis Quantitas, quantumvis ſit magna, ulterius augeri poſſit, neque quicquam obſtet, quominus ad datam quantitatem quamcumque alia quantitas eiusdem generis addi queat; omnis quoque quantitas ſine fine augeri poterit: neque enim unquam tam magna fiet, ut ipſi nihil amplius adiici poſſit. Nulla igitur datur quantitas tam magna, qua maior concipi nequeat: hincque extra dubium erit poſitum, *omnem quantitatem in infinitum augeri poſſe*. Qui enim hoc negaverit, is affirmare cogitur, dari limitem, quem quantitas, cum attigerit, ſuperare nequeat, atque ideo ſtatuere debebit quantitatem, cui nihil amplius adiici poſſit; quod cum ſit abſurdum atque quantitatis notioni adverſetur, neceſſario concedendum eſt, omnem quantitatem ſine fine continuo magis, hoc eſt, in infinitum augeri poſſe.

73. In ſingulis quantitatum ſpeciebus hoc etiam clarius perſpicietur. Sic, nemo facile reperietur, qui ſtatuerit ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ita uſquam eſſe determinatam, ut ulterius continuari non poſſit. Nullus enim datur numerus, ad quem non inſuper unitas addi, ſicque numerus ſequens maior exhiberi queat; hinc ſeries numerorum naturalium ſine fine progreditur, neque unquam pervenitur ad numerum maximum, quo maior prorſus non detur. Simili modo linea recta nunquam eouſque produci poteſt, ut inſuper ulterius prolongari non poſſit. Quibus evincitur, tam numeros in infinitum augeri, quam lineas in infinitum produci poſſe. Quae cum ſint ſpecies quantitatum,

ſimul intelligitur, omni quantitate, quantumvis ſit magna, adhuc dari maiorem, hacque denuo maiorem, ſicque augendo continuo ulterius ſine fine, hoc eſt in infinitum, procedi poſſe.

74. Quanquam autem haec ſunt adeo perſpicua, ut qui ea negare vellet, ſibi ipſe contradicere deberet; tamen iſta infiniti doctrina a pluribus, qui eam explicare ſunt conati, tantopere eſt offuſcata, tantiſque difficultatibus atque etiam contradictionibus obvoluta, ut, qua ſe extricarent, nulla via pateret. Ex eo, quod quantitas in infinitum augeri poſſit, quidam concluſerunt, dari revera quantitatem infinitam, eamque ita deſcripſerunt, ut nullum amplius augmentum ſuſcipere poſſit. Hoc autem ipſo ideam quantitatis evertunt, dum eiuſmodi quantitatem ſtatuunt, quae ulterius augeri nequeat. Praeterea vero ſecum ipſi infinitum admittentes pugnant; dum enim incrementi, quo quantitas ſit capax, finem faciunt, ſimul negant quantitatem ſine fine augeri poſſe, negant ergo quoque quantitatem in infinitum augeri poſſe, quoniam utraque locutio congruit: ſicque, dum quantitatem infinitam ſtatuunt, eam ſimul tollunt. Si enim quantitas ſine fine, hoc eſt in infinitum, augeri nequeat, certe nulla quantitas infinita exiſtere poterit.

75. Hinc igitur ex eo ipſo, quod omnis quantitas in infinitum augeri poſſit, ſequi videtur nullam dari quantitatem infinitam. Quantitas enim continuis incrementis aucta, infinita non evadet, niſi iam ſine fine increverit: quod autem ſine fine fieri debet, id non tanquam iam factum concipi poteſt. Interim tamen non ſolum huiuſmodi quantitatem, ad quam incrementis ſine fine congeſtis pervenitur, certo charactere indicare, ſicque debito modo in calculum inducere licet, uti mox fuſius oſtendemus; ſed etiam in mundo eiuſmodi caſus exiſtere, vel ſaltem concipi poſſunt, quibus numerus infinitus actu exiſtere videatur. Sic ſi materia in infinitum ſit diviſibilis, uti plures Philoſophi ſtatuerunt, numerus

par-

partium, quibus datum quodque materiae frustum constat, revera erit infinitus; si enim statueretur finitus, materia certe non in infinitum foret divisibilis. Simili modo si universus mundus esset infinitus, uti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium finitus certe esse non posset, foretque ideo quoque infinitus.

76. Haec etiamsi inter se pugnare videantur, tamen si attentius perpendantur, a cunctis incommodis liberari poterunt. Qui enim statuit materiam in infinitum esse divisibilem, is negat in divisione materiae continua unquam ad partes tam parvas perveniri, quae ulterius dividi nequeant: nullas ergo materia habebit partes, ulterius individuas; cum singulae particulae, ad quas per continuam divisionem iam sit perventum, ulterius se subdividi patiantur. Qui igitur dicit hoc casu numerum partium fore infinitum, is partes ultimas, quae ulterius sint individuae, intelligit; ad quas cum nunquam perveniatur, & quae propterea nullae sunt, is has ipsas partes, quae nullae sunt, numerare conatur. Si enim materia sine fine continuo ulterius subdividi potest, partibus individuis seu simplicibus prorsus caret: neque adeo quicquam superest, quod numerari queat. Hanc ob rem qui materiam in infinitum divisibilem statuit, is simul negat, materiam ex partibus simplicibus esse compositam.

77. Quod si autem, dum de partibus alicuius corporis seu materiae loquimur, non ultimas seu simplices, quippe quae nullae sunt, intelligamus, sed eas, quas divisio revera produxit; tum admissa hac hypothesi de divisibilitate materiae in infinitum, unumquodque vel minimum materiae frustum non solum in plurimas partes dissecari, sed etiam nullus numerus tam magnus assignari poterit, quo non maior partium ex illo frusto sectarum numerus exhiberi queat. Numerus ergo partium non quidem ultimarum, sed quae ipsae adhuc sint ulterius divisibiles, quae unumquodque corpus componunt, omni numero assignabili erit maior. Simili mo-

do, si universus mundus sit infinitus, numerus corporum mundum constituentium pariter omni assignabili erit maior; qui cum finitus esse nequeat, sequitur numerum infinitum & numerum omni assignabili maiorem esse nomina synonyma.

78. Qui ergo hoc modo divisibilitatem materiae in infinitum intuetur, nullis incommodis, quae vulgo huic opinioni imputantur, se implicat, nihilque affirmare cogitur, quod sanae rationi adversetur. Qui autem contra materiam in infinitum divisibilem esse negant, ii in maximas difficultates prolabuntur, ex quibus se nullo prorsus modo extrahere possunt. Statuere enim coguntur unumquodque corpus nonnisi in certum partium numerum dissecari posse, ad quas si fuerit perventum, nulla divisio ulterior locum inveniat; quas ultimas particulas alii *atomos*, alii *monades* atque *entia simplicia* vocant. Cur autem istae ultimae particulae nullam amplius divisionem admittant, duplex esse potest causa: altera, quod omni extensione careant; altera quod quidem sint extensae, sed tamen tam durae atque ita comparatae, ut nulla vis ad eas dissecandas sufficiat. Utrumvis patroni huius opinionis dicant, sese aeque difficultatibus implicant.

79. Sint enim ultimae particulae omnis extensionis expertes, ita ut partibus prorsus careant; qua explicatione quidem ideam entium simplicium optime tuentur. At, quemadmodum corpus ex finito huiusmodi particularum numero constare queat, concipi nullo modo potest. Ponamus pedem cubicum materiae ex mille huiusmodi entibus simplicibus esse compositum, huncque actu in mille partes secari; quae si sint aequales, erunt digiti cubici: sin autem sint inaequales, aliae erunt maiores aliae minores. Unus igitur digitus cubicus foret ens simplex, sicque maxima resultaret contradictio; nisi forte in digito cubico inesse tantum unum ens simplex, reliquumque spatium vacuum esse dicere velint: at vero hoc modo continuitatem corporum tollerent, praeterquam quod isti Philosophi vacuum plane ex mundo profligant.

Quodsi

Quodſi obiiciant numerum entium ſimplicium, quae pedem cubicum materiae conſtituunt, millenario longe eſſe maiorem, nihil omnino lucrantur: incommodum enim, quod ex numero millenario ſequitur, ex quovis alio numero quantumvis magno aeque manat. Hanc difficultatem Acutiſſimus LEIBNIZIUS, primus monadum inventor, probe perſpexit, dum materiam abſolute in infinitum diviſibilem eſſe ſtatuit. Neque ergo ante ad monades pervenire licet, quam corpus actu in infinitum ſit diviſum. Hoc ipſo autem exiſtentiam entium ſimplicium, ex quibus corpora conſtent, penitus tollit: nam qui negat corpora ex entibus ſimplicibus eſſe compoſita, & ille qui ſtatuit corpora in infinitum eſſe diviſibilia, in eadem prorſus ſunt ſententia.

80. Neque magis autem ſibi conſtant, ſi dicunt ultimas corporum particulas extenſas quidem eſſe, ſed ob ſummam duritiem in partes divelli non poſſe. Cum primum enim in ultimis particulis extenſionem admittunt, eas ex partibus compoſitas eſſe ſtatuunt, quae, utrum revera a ſe invicem ſeparari queant nec ne, parum refert; etiamſi nullam cauſam aſſignare poſſint, unde tanta durities ſit orta. Nunc autem plerique, qui diviſibilitatem materiae in infinitum negant; hoc poſterius incommodum ſatis ſenſiſſe videntur, quia priori ideae partium ultimarum potiſſimum inhaerent; haſque difficultates aliter diluere non poſſunt, niſi aliquot leviuſculis metaphyſicis diſtinctionibus, quae maximam partem eo tendunt, ut ne conſequentiis, quae ſecundum mathematica principia formantur, fidamus; neque dimenſiones in partibus ſimplicibus adhiberi oportere regerunt. At primum demonſtrare debuiſſent, iſtas ſuas partes ultimas, quarum determinatus numerus corpus conſtituat, extenſas prorſus non eſſe.

81. Cum igitur ex hoc labyrintho exitum nullum invenire, neque obiectionibus debito modo occurrere queant, ad diſtinctiones confugiunt, reſpondentes has obiectiones a

ſen-

sensibus atque imaginatione suppeditari, in hoc autem negotio solum intellectum purum adhiberi oportere; sensus autem ac ratiocinia inde pendentia saepissime fallere. Intellectus scilicet purus agnoscet fieri posse, ut pars millesima pedis cubici materiae omni extensione careat, quod imaginationi absurdum videtur. Tum vero, quod sensus saepenumero fallant, res vera quidem est, at nemini minus quam mathematicis opponi potest. Mathesis enim nos imprimis a fallacia sensuum defendit, atque docet obiecta, quae sensibus percipiuntur, aliter revera esse comparata, aliter vero apparere: haecque scientia tutissima tradit praecepta, quae qui sequuntur, ab illusione sensuum immunes sunt. Huiusmodi ergo responsionibus, tantum abest, ut Metaphysici suam doctrinam tueantur, ut eam potius magis suspectam efficiant.

82. Verum ut ad propositum revertamur, etiamsi quis neget in mundo numerum infinitum revera existere; tamen in speculationibus mathematicis saepissime occurrunt questiones, ad quas, nisi numerus infinitus admittatur, responderi non posset. Sic, si quaeratur summa omnium numerorum, qui hanc seriem $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. constituunt; quia isti numeri sine fine progrediuntur, atque crescunt, eorum omnium summa certe finita esse non poterit: quo ipso efficitur, eam esse infinitam. Hinc, quae quantitas tanta est, ut omni quantitate finita sit maior, ea non infinita esse nequit. Ad huiusmodi quantitatem designandam Mathematici utuntur hoc signo ∞, quo denotatur quantitas omni quantitate finita, seu assignabili, maior. Sic cum Parabola ita definiri queat, ut dicatur esse Ellipsis infinite longa, recte affirmare poterimus axem Parabolae esse Lineam rectam infinitam.

83. Haec autem infiniti doctrina magis illustrabitur, si quid sit infinite parvum Mathematicorum exposuerimus. Nullum autem est dubium, quin omnis quantitas eousque diminui queat, quoad penitus evanescat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parva nil aliud est nisi quantitas eva-

evanescens, ideoque revera erit $= 0$. Consentit quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni quantitate assignabili minora: si enim quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla; namque nisi esset $= 0$, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Quaerenti ergo, quid sit quantitas infinite parva in Mathesi, respondemus eam esse revera $= 0$: neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt. Interim tamen dubia, si quae supererunt, in sequentibus, ubi hunc calculum sumus tradituri, funditus tollentur.

84. Cum igitur ostenderimus, quantitatem infinite parvam revera esse cyphram, primum occurrendum est obiectioni, cur quantitates infinite parvas non perpetuo eodem charactere o designemus, sed peculiares notas ad eas designandas adhibeamus. Quia enim omnia nihila sunt inter se aequalia, superfluum videtur variis signis ea denotare. Verum quamquam duae quaevis cyphrae ita inter se sunt aequales, ut earum differentia sit nihil: tamen, cum duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geometricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quantitatibus comparandis ortum spectamus; ratio quidem arithmetica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non vero ratio geometrica. Facillime hoc perspicietur ex hac proportione geometrica $2 : 1 = 0 : 0$, in qua terminus quartus est $= 0$, uti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo sit maior quam secundus, necesse est, ut & tertius duplo maior sit quam quartus.

85. Haec autem etiam in vulgari Arithmetica sunt planissima: cuilibet enim notum est, cyphram per quemvis numerum multiplicatam dare cyphram, esseque $n . 0 = 0$, sicque fore $n : 1 = 0 : 0$. Unde patet fieri posse, ut duae cyphrae quamcumque inter se rationem geometricam teneant,

etiamsi,

etiamsi, rem arithmetice spectando, earum ratio semper sit aequalitatis. Cum igitur inter cyphras ratio quaecumque intercedere possit, ad hanc diversitatem indicandam consulto varii characteres usurpantur; praesertim tum, cum ratio geometrica, quam cyphrae variae inter se tenent, est investiganda. In calculo autem infinite parvorum nil aliud agitur, nisi ut ratio geometrica inter varia infinite parva indagetur, quod negotium propterea, nisi diversis signis ad ea indicanda uteremur, in maximam confusionem illaberetur, neque ullo modo expediri posset.

86. Si ergo, prouti in Analysi infinitorum modus signandi est receptus, denotet dx quantitatem infinite parvam, erit utique tam $dx = 0$, quam $a\,dx = 0$, denotante a quantitatem quamcumque finitam. Hoc tamen non obstante erit ratio geometrica $a\,dx : dx$ finita, nempe ut $a : 1$; & hanc ob rem haec duo infinite parva dx & $a\,dx$, etiamsi utrumque sit $= 0$, inter se confundi non possunt, si quidem eorum ratio investigetur. Simili modo, si diversa occurrunt infinite parva dx & dy, etiamsi utrumque sit $= 0$, tamen eorum ratio non constat. Atque in investigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parva omnis vis calculi differentialis versatur. Usus autem huius comparationis, etiamsi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen amplissimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

87. Cum igitur infinite parvum sit revera nihil, patet quantitatem finitam neque augeri neque diminui, si ad eam infinite parvum vel addamus vel ab ea subtrahamus. Sit a quantitas finita atque dx infinite parva, erit tam $a + dx$, quam $a - dx$, & generaliter $a \pm n\,dx = a$. Sive enim relationem inter $a \pm n\,dx$ & a arithmetice intueamur sive geometrice, utroque casu ratio aequalitatis deprehendetur. Arithmetica quidem ratio aequalitatis manifesta est; cum enim sit $n\,dx = 0$, erit $a \pm n\,dx - a = 0$: geometrica ve-

vero ratio aequalitatis inde patet, quod sit $\frac{a \pm n\,dx}{a} = 1$. Hinc sequitur canon ille maxime receptus, quod *infinite parva prae finitis evanescant, atque adeo horum respectu reiici queant*. Quare illa obiectio, qua Analysis infinitorum rigorem geometricum negligere arguitur, sponte cadit, cum nil aliud reiiciatur, nisi quod revera sit nihil. Ac propterea iure affirmare licet, in hac sublimiori scientia rigorem geometricum summum, qui in Veterum libris deprehenditur, aeque diligenter observari.

88. Quoniam quantitas infinite parva dx revera est $= 0$, eius quoque quadratum dx^2, cubus dx^3, & quaevis alia potestas affirmativum habens exponentem erit $= 0$, ideoque aeque prae quantitatibus finitis evanescent. At vero etiam quantitas infinite parva dx^2 prae ipsa dx evanescit; erit enim $dx \pm dx^2$ ad dx in ratione aequalitatis, sive comparatio arithmetice sive geometrice instituatur. De priori quidem dubium est nullum, at geometrice comparando erit

$$dx \pm dx^2 : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1.$$

Pari modo erit $dx \pm dx^3 = dx$, & generaliter $dx \pm dx^{n+1} = dx$, dummodo sit n numerus nihilo maior: erit enim ratio geometrica $dx \pm dx^{n+1} : dx = 1 \pm dx^n$; ideoque, ob $dx^n = 0$, ratio aequalitatis. Si igitur uti in potestatibus fit, vocetur dx infinite parvum primi ordinis, dx^2 secundi ordinis, dx^3 tertii ordinis & ita porro, manifestum est prae infinite parvis primi ordinis, evanescere infinite parva altiorum ordinum.

89. Simili modo ostendetur infinite parva tertii ac superiorum ordinum evanescere prae infinite parvis ordinis secundi; atque in genere infinite parva cuiusque ordinis superioris evanescere prae infinite parvis ordinis inferioris. Ita si m fuerit numerus minor quam n, erit $a\,dx^m + b\,dx^n = a\,dx^m$,

quia dx^n evanescit prae dx^m, uti ostendimus. Hocque etiam in exponentibus fractis habet locum; ita dx evanescet prae $\sqrt{dx}$ seu $dx^{\frac{1}{2}}$, eritque $a\sqrt{dx}+bdx=a\sqrt{dx}$. Quodsi autem exponens ipsius dx sit $=0$, erit $dx^0=1$, quamvis sit $dx=0$; hinc potestas dx^n, cum fiat $=1$, si sit $n=0$, ex finita statim fit quantitas infinite parva, atque exponens n nihilo fit maiôr. Hinc ergo infiniti ordines infinite parvorum existunt, quae etsi omnia sint $=0$, tamen inter se probe distingui debent, si ad earum relationem mutuam, quae per rationem geometricam explicatur, attendamus.

90. Stabilita notione infinite parvorum facilius indolem infinitorum seu infinite magnorum exponere poterimus. Notum est valorem fractionis $\frac{1}{z}$ eo maiorem evadere, quo magis diminuatur denominator z; quare si z fiat quantitas omni assignabili quantitate minor, seu infinite parva, necesse est ut valor fractionis $\frac{1}{z}$ fiat omni assignabili quantitate maior, ideoque infinitus. Quamobrem si unitas seu quaevis alia quantitas finita dividatur per infinite parvum seu 0, quotus erit infinite magnus, ideoque quantitas infinita. Cum igitur hoc signum ∞ denotet quantitatem infinite magnam, ista habebitur aequatio $\frac{a}{dx}=\infty$; cuius veritas quoque hinc patet, quod sit invertendo $\frac{a}{\infty}=dx=0$. Namque quo maior statuitur fractionis $\frac{a}{z}$ denominator z, eo minor fit fractionis valor, atque si z fiat quantitas infinite magna seu $z=\infty$, necesse est, ut fractionis valor $\frac{a}{\infty}$ fiat infinite parvus

91. Qui utrumvis horum ratiociniorum negaverit eum

in

in maxima incommoda prolabi, atque adeo certissima Analyseos fundamenta evertere necesse est. Qui enim statuit valorem fractionis $\frac{a}{0}$ esse finitum uti b, utrinque per denominatorem multiplicando prodiret $a = 0 \cdot b$, atque ideo quantitas finita b per nihil 0 multiplicata praeberet quantitatem finitam a, quod esset absurdum. Multo minus valor ille b fractionis $\frac{a}{0}$ poterit esse $= 0$: nam 0 per 0 multiplicata quantitatem a producere nullo modo poterit. In idem absurdum incidit, qui negat esse $\frac{a}{\infty} = 0$, ei enim dicendum erit esse $\frac{a}{\infty} =$ quantitati finitae b: quare cum ex aequatione $\frac{a}{\infty} = b$ legitime sequatur haec $\infty = \frac{a}{b}$, foret valor fractionis $\frac{a}{b}$, cuius numerator ac denominator sunt quantitates finitae, infinite magnus, quod perinde foret absurdum. Neque vero etiam valores fractionum $\frac{a}{0}$ & $\frac{a}{\infty}$ imaginarii statui possunt; propterea quod valor fractionis, cuius numerator est finitus denominator vero imaginarius, neque infinite magnus neque infinite parvus esse potest.

92. Quantitas ergo infinite magna, ad quam nos haec consideratio perduxit, & quae sola in Analysi infinitorum locum habet, commodissime definitur dicendo, quantitatem infinite magnam esse quotum, qui ex divisione quantitatis finitae per infinite parvam oritur. Vicissim ergo erit quantitas infinite parva quotus, qui oritur ex divisione quantitatis finitae per infinite magnam. Quare, cum eiusmodi proportio geometrica subsistat, ut sit quantitas infinite parva ad finitam, ita finita ad infinite magnam; uti quantitas infinita infinities maior est quam finita, ita quantitas finita infinities

maior erit quam infinite parva. Huiusmodi igitur locutiones, quibus plures offenduntur, non sunt improbandae, cum certissimis innitantur principiis. Deinde etiam ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ sequitur fieri posse, ut nihil per quantitatem infinite magnam multiplicatum producat quantitatem finitam, quod alienum videri posset, nisi planissime per legitimam consequentiam esset deductum.

93. Quoniam inter infinite parva, si secundum rationem geometricam inter se comparantur, maximum deprehenditur discrimen, ita quoque inter quantitates infinite magnas multo maior differentia intercedit, cum non solum geometrice sed etiam arithmetice comparatae discrepent. Ponatur quantitas illa infinita, quae ex divisione quantitatis finitae a per infinitae parvam dx oritur, $= A$, ita ut sit $\frac{a}{dx} = A$: erit utique $\frac{2a}{dx} = 2A$ & $\frac{na}{dx} = nA$; cum igitur & nA sit quantitas infinita, sequitur inter quantitates infinite magnas rationem quamcunque locum habere posse. Hincque, si quantitas infinita per numerum finitum sive multiplicetur, sive dividatur, prodibit quantitas infinita. Neque ergo de quantitatibus infinitis negari potest, eas ulterius augeri posse. Facile autem perspicitur, si ratio geometrica, quam duae quantitates infinitae inter se tenent, non fuerit aequalitatis, multo minus earum rationem arithmeticam aequalitatis esse posse; cum potius earum differentia semper sit infinite magna.

94. Quantumvis autem nonnullis idea infiniti, qua in Mathesi utimur, suspecta videatur, qui hanc ob causam Analysin infinitorum profligandam arbitrantur; tamen hac idea ne in partibus quidem Matheseos trivialibus carere possumus. In Arithmetica enim, ubi doctrina logarithmorum tradi solet, logarithmus cyphrae & negativus & infinite magnus

gnus statuitur, neque quisquam est tam mente captus, ut hunc logarithmum vel finitum vel adeo nihilo aequalem dicere audeat. In Geometria autem & Trigonometria hoc clarius apparet; quis enim unquam negabit tangentem secantemve anguli recti non esse infinite magnam? & cum rectangulum ex tangente in cotangentem sit radii quadrato aequale, cotangens autem anguli recti sit $= 0$; in Geometria adeo concedi debet, productum ex nihilo & infinito esse posse finitum.

95. Cum sit $\frac{a}{dx}$ quantitas infinita A, patet hanc quantitatem $\frac{A}{dx}$ fore quantitatem infinities maiorem, quam A: est enim $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx} = a : A$, hoc est ut numerus finitus ad infinite magnum. Dantur ergo inter quantitates infinite magnas eiusmodi relationes, ut aliae aliis infinities maiores esse queant. Sic $\frac{a}{dx^2}$ erit quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx}$; posito enim $\frac{a}{dx} = A$ erit $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Simili modo erit $\frac{a}{dx^3}$ quantitas infinita infinities maior quam $\frac{a}{dx^2}$, ideoque infinities infinities maior quam $\frac{a}{dx}$. Dantur ergo infiniti gradus infinitorum, quorum quisque infinities maior est quam praecedentes: atque adeo si numerus m vel tantillum maior sit quam n erit $\frac{a}{dx^m}$ quantitas infinita infinities maior quam quantitas infinita $\frac{a}{dx^n}$.

96. Quemadmodum in quantitatibus infinite parvis dantur rationes geometricae inaequales, cum tamen rationes arithmeticae omnes ſint aequales: ita in quantitatibus infinite magnis dantur rationes geometricae aequales, cum tamen arithmeticae ſint quantumvis inaequales. Si enim a & b denotent quantitates finitas, hae duae quantitates infinitae $\frac{a}{dx}+b$ & $\frac{a}{dx}$ rationem geometricam habent aequalitatis; erit enim quotus ex earum diviſione ortus $=1+\frac{bdx}{a}=1$ ob $dx=0$: interim tamen, ſi arithmetice comparentur, ob differentiam $=b$, ratio erit inaequalitatis. Simili modo $\frac{a}{dx^2}+\frac{a}{dx}$ ad $\frac{a}{dx^2}$ rationem geometricam habet aequalitatis, exponens enim rationis eſt $=1+dx=1$; verum tamen differentia eſt $\frac{a}{dx}$ ideoque infinita. Hinc ſi ad rationem geometricam ſpectemus, infinite magna inferiorum graduum prae infinite magnis ſuperiorum graduum evaneſcunt.

97. His de gradibus infinitorum praemonitis, mox apparebit fieri poſſe, ut productum ex quantitate infinite magna in infinite parvam non ſolum quantitatem finitam producat, quod ſupra eveniſſe vidimus; ſed etiam huiuſmodi productum eſſe poterit ſive infinite magnum ſive infinite parvum. Sic quantitas infinita $\frac{a}{dx}$, ſi per infinite parvam dx multiplicetur, dat productum finitum $=a$; ſin autem $\frac{a}{dx}$ multiplicetur per infinite parvum dx^2, vel dx^3, vel aliud ſuperioris ordinis, productum erit vel adx, vel adx^2, vel adx^3 &c. ideoque infinite parvum. Eodem modo intelligetur, ſi quantitas infinita $\frac{a}{dx^2}$ multiplicetur per infinite par-

vam dx, productum fore infinite magnum: atque generatim si $\frac{a}{dx^n}$ multiplicetur per bdx^m, productum $abdx^{m-n}$ erit infinite parvum si m superat n; finitum si m aequat n; & infinite magnum si m superatur ab n.

98. Quantitates tam infinite parvae, quam infinite magnae in seriebus numerorum saepissime occurrunt, in quibus cum sint numeris finitis permixtae, ex iis luculenter patebit, quemadmodum secundum leges continuitatis a quantitatibus finitis ad infinite magnas atque infinite parvas transitio fiat. Consideremus primum seriem numerorum naturalium, quae simul retro continuata erit

$$\&c. -4-3-2-1+0+1+2+3+4+ \&c.$$

Numeri ergo continuo decrescendo praebent tandem o seu infinite parvum, unde ulterius continuati negativi evadunt. Quamobrem hinc intelligitur a numeris finitis affirmativis decrescentibus transiri per o ad negativos crescentes. Sin autem eorum numerorum quadrata spectentur, quia omnia sunt affirmativa

$$\&c. +16+9+4+1+0+1+4+9+16+ \&c.$$

erit o quoque transitus numerorum affirmativorum decrescentium ad affirmativos crescentes; atque si signa mutentur, erit quoque o transitus numerorum negativorum decrescentium ad negativos crescentes.

99. Si series consideretur, cuius terminus generalis est $\sqrt{x}$, quae etiam retro continuata erit huiusmodi

$$\&c. +\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1}+0+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+ \&c.$$

ex qua patet o, quoque tanquam limitem considerari posse, per quem a quantitatibus realibus ad imaginaria transeatur. Si isti termini tanquam applicatae curvarum considerentur, perspicitur, si eae fuerint affirmativae atque eousque decreverint ut tandem evanescant, tum eas ulterius continuatas vel fieri negativas, vel iterum affirmativas vel adeo imaginarias.

Idem

Idem eveniet, ſi applicatae primum fuerint negativae; tum enim aeque poſt quam evanuerint, ſi ulterius continuentur, vel affirmativae fient, vel negativae vel imaginariae; quorum phaenomenorum plurima exempla praebet doctrina de lineis curvis in libro praecedente tractata.

100. Eodem modo in ſeriebus occurrunt ſaepe termini infiniti: ſic in ſerie harmonica, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{x}$, indici $x = 0$ reſpondebit terminus infinite magnus $\frac{1}{0}$; totaque ſeries ita ſe habebit:

$$\&c. - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \&c.$$

A dextra ergo ad ſiniſtram progrediendo termini creſcunt, ita ut $\frac{1}{0}$ iam ſit infinite magnus, quem cum tranſierint, fient negativi decreſcentes. Hinc quantitas infinite magna ſpectari poteſt tanquam limes, per quem numeri affirmativi progreſſi fiunt negativi, & viciſſim: unde pluribus viſum eſt, numeros negativos conſiderari poſſe, tanquam infinito maiores, propterea quod in hac ſerie termini continuo creſcentes, poſtquam infinitum attigerint, abeant in negativos. At vero ſi ad ſeriem, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{xx}$, attendamus, poſt tranſitum per infinitum rurſus prodeunt termini affirmativi.

$$\&c. \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{0} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \&c.$$

quos tamen nemo infinito maiores dixerit.

101. Saepenumero quoque in ſeriebus terminus infinitus conſtituit limitem, terminos reales ab imaginariis ſegregantem, uti fit in ſerie hac, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{\surd x}$

$$\&c. + \frac{1}{\surd -3} + \frac{1}{\surd -2} + \frac{1}{\surd -1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{\surd 1} + \frac{1}{\surd 2} + \frac{1}{\surd 3} + \&c.$$

ne-

neque tamen hinc sequitur, imaginaria esse infinito maiora: quoniam ex serie ante allata

$$\&c. + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \quad \&c.$$

aeque sequeretur, imaginaria esse nihilo minora. Deinde vero etiam a terminis realibus transitus ad imaginarios exhiberi potest, quorum limes neque sit o neque ∞, uti fit si terminus generalis fuerit $1 + \sqrt{x}$. His autem casibus, cum ob irrationalitatem quilibet terminus geminum habeat valorem, in limite inter realia & imaginaria semper bini illi valores fiunt inter se aequales. At quoties termini, qui ante erant affirmativi, abeunt in negativos, transitus semper fit per limitem vel infinite parvum, vel infinite magnum, quae omnia ex lege continuitatis, quam in lineis curvis deprehendimus, clarius elucent.

102. Ex summatione quoque serierum in infinitum excurrentium plura hic afferri possunt, quae cum ad hanc infiniti doctrinam magis illustrandam, tum vero ad plura dubia, quae in hoc negotio suboriri solent, delenda inserviunt. Ac primo quidem, si series constet ex terminis aequalibus, ut

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \quad \&c.$$

eaque sine fine, hoc est in infinitum continuetur, nullum certe est dubium, quin omnium horum terminorum summa maior sit omni numero assignabili; eaque propterea infinita sit necesse est. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex evolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$$

ponendo $x = 1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ideoque summa $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ infinito.

103. Quamvis autem hic nullum dubium nasci queat, cum idem numerus finitus infinities sumtus in infinitum abire debeat; tamen ipsa origo ex serie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

gravissima incommoda afferre videtur: si enim pro x successive ponantur numeri 1, 2, 3, &c. sequentes series cum suis summis prodibunt.

$$A \ldots 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \frac{1}{1-1} = \text{infinito}$$

$$B \ldots 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \&c. = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$C \ldots 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \&c. = \frac{1}{1-3} = -\tfrac{1}{2}$$

$$D \ldots 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \&c. = \frac{1}{1-4} = -\tfrac{1}{3}$$

&c.

Cum igitur series B singulos terminos praeter primum habeat maiores, quam series A, summa seriei B necessario multo maior esse deberet, quam summa seriei A: interim tamen iste calculus ostendit seriei A summam infinitam, seriei B vero summam negativam, hoc est nihilo minorem, quod concipi non potest. Multo minus cum solitis ideis conciliari potest, quemadmodum huius & sequentium serierum C, D, &c. summae fiant negativae, cum tamen omnes termini sint affirmativi.

104. Ob hanc rationem opinio supra allata multis probabilis videri solet, quantitates scilicet negativas quandoque considerari posse tanquam infinito maiores seu plus quam infinitas; & cum etiam numeros ultra nihil diminuendo perveniatur ad negativos, discrimen statuunt inter numeros negativos huiusmodi -1, -2, -3, &c. & huiusmodi

+

$\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}$, &c. illos nihilo minores, hos vero infinito maiores dicendo. Verumtamen hoc pacto difficultatem non tollunt, quam suggerit haec series

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. = \frac{1}{(1-x)^2}$$

unde oriuntur sequentes series:

$$A \ldots 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c. = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{infinito}$$

$$B \ldots 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \&c. = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$$

ubi cum singuli termini seriei B sint maiores, quam singuli termini seriei A, primis solis exceptis, quemadmodum summa seriei A sit infinita, seriei B vero summa aequalis 1, hoc est soli termino primo, ex illo principio explicari omnino nequit.

105. Quoniam autem si vellemus negare esse $-1 = \frac{+1}{-1}$, & $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$, firmissima Analyseos fundamenta collaberentur, illa ante commemorata explicatio prorsus admitti non potest. Quin potius negare debebimus, illas, quas formulae generales suppeditaverant, summas esse veras. Cum enim hae series ex continua divisione oriantur, dum residuum continuo ulterius dividitur: residuum autem perpetuo fiat maius, quo longius progrediamur, id nunquam negligere poterimus; atque minime residuum ultimum, hoc est quod in divisione infinitesima remanet, omitti potest, quippe quod sit infinite magnum. Quia autem hoc in superioribus seriebus non observatur, dum nullius residui ratio habetur, mirum non est, eas summationes ad absurdum deducere. Haecque responsio, uti est ex ipsa serierum genesi petita, ita quoque est verissima, atque omnem dubitationem tollit.

106. Quo hoc clarius appareat, contemplemur evolutionem fractionis $\frac{1}{1-x}$, uti in terminis primum finitis tantum absolvitur. Erit ergo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius seriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$ summam esse $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$: & qui summam huius seriei

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{1000}$

statuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$ qui error si x sit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perspicuum est eum, qui eiusdem seriei in infinitum continuatae seu huius:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{\infty}$$

summam statuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate esse aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; quae si sit $x > 1$ utique erit infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur seriei in infinitum continuatae

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ \&c.}$$

summa revera fit $= \frac{1}{1-x}$, si fuerit x fractio unitate minor, tum enim error $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ fit infinite parvus, ideoque nullus; cuius propterea ratio tuto potest negligi. Sic posito $x = \frac{1}{2}$, erit revera

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \&c. = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

similiterque reliquarum serierum, si x sit fractio unitate minor, summa vera hoc modo indicatur.

108. Haec eadem responsio valet de summis serierum divergentium, in quibus signa + & — alternantur, quae vulgo ex eadem formula exhiberi solent, ponendo pro x numeros negativos. Cum enim sit:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \&c.$$

nisi ultimi residui ratio habeatur, foret:

A . . . $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2}$
B . . . $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \&c. = \frac{1}{3}$
C . . . $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \&c. = \frac{1}{4}$
&c.

Patet autem seriei secundae B summam ideo non posse esse $= \frac{1}{3}$, cum quo plures termini actu summentur, aggregata eo magis ab $\frac{1}{3}$ recedant. Perpetuo autem cuiusque seriei summa debet esse limes, ad quem eo propius perveniatur, quo plures termini actu addantur.

109. Ex his quidam concluserunt huiusmodi series, quae vocantur divergentes, prorsus nullas habere summas fixas; propterea quod colligendis actu terminis ad nullum limitem fiat appropinquatio, qui pro summa seriei in infinitum continuatae haberi posset: quae sententia, cum istae summae iam ob neglecta ultima residua erroneae sint ostensae,

ſae, veritati maxime eſt conſentanea. Interim tamen contra eam ſummo iure obiici poteſt, has memoratas ſummas, quantumvis a veritate abhorrere videantur, tamen nunquam in errores inducere; quin potius iis admiſſis plurima praeclara eſſe eruta, quibus ſi iſtas ſummationes prorſus reiicere vellemus, carendum eſſet. Neque vero hae ſummae, ſi eſſent falſae, perpetuo ad veritatem nos ducere poſſent; quin potius, cum non parum ſed infinite a veritate diſcrepent, nos quoque in infinitum a vero ſeducere deberent. Quod tamen cum non eveniat, difficillimus nobis reſtat nodus ſolvendus.

110. Dico igitur in voce *ſummae* latere totam difficultatem; ſi enim *ſumma* ſeriei, ut vulgo uſus fert, ſumatur pro aggregato omnium eius terminorum actu collectorum, tum dubium eſt nullum, quin earum tantum ſerierum in infinitum excurrentium ſummae exhiberi queant, quae ſint convergentes, atque continuo propius ad certum ſtatumque valorem deducant, quo plures termini actu colligantur. Series autem divergentes, quarum termini non decreſcunt, ſive ſigna + & — alternentur ſive ſecus, prorſus nullas habebunt ſummas fixas; ſi quidem vox ſummae hoc ſenſu pro aggregato omnium terminorum accipiatur. At vero in iis caſibus, quorum meminimus, quibus ex iſtiuſmodi ſummis erroneis veritas tamen elicitur; id non fit, quatenus expreſſio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, eſt ſumma ſeriei $1+x+x^2+x^3+$ &c. ſed quatenus ea expreſſio evoluta hanc ſeriem praebet; ſicque in hoc negotio nomen ſummae prorſus omitti poſſet.

111. Haec igitur incommoda, haſque apparentes contradictiones penitus evitabimus, ſi voci *ſummae* aliam notionem, atque vulgo fieri ſolet, tribuamus. Dicamus ergo ſeriei cuiuſque infinitae *ſummam* eſſe expreſſionem finitam, ex cuius evolutione illa ſeries naſcatur. Hocque ſenſu ſeriei in-

infinitae $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. ſumma revera erit $= \frac{1}{1-x}$, quia illa ſeries ex huius fractionis evolutione oritur: quicunque numerus loco x ſubſtituatur. Hoc pacto, ſi ſeries fuerit convergens, iſta nova vocis ſummae definitio, cum conſueta congruet; & quia divergentes nullas habent ſummas proprie ſic dictas, hinc nullum incommodum ex nova hac appellatione orietur. Denique ope huius definitionis utilitatem ſerierum divergentium tueri, atque ab omnibus iniuriis vindicare poterimus.



CA-

CAPUT IV.

DE DIFFERENTIALIUM CUIUSQUE ORDINIS NATURA

112.

In capite primo vidimus, si quantitas variabilis x accipiat augmentum $=\omega$, tum cuiusvis functionis ipsius x augmentum inde oriundum tali forma exprimi $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ &c. sive haec expressio sit finita sive in infinitum excurrat. Functio ergo y, si in ea loco x scribatur $x+\omega$, valorem sequentem induet:

$$y^{\text{I}} = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

a quo, si valor prior y subtrahatur, remanebit differentia functionis y, quae ita exprimetur

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

atque cum valor ipsius x sequens sit $x^{\text{I}} = x + \omega$, erit differentia ipsius x, nempe $\Delta x = \omega$. Litterae autem P, Q, R, &c. denotant functiones ipsius x pendentes ab y, quas capite primo invenire docuimus.

113. Hinc ergo quocunque augmento ω augeatur quantitas variabilis x, simul definiri poterit augmentum, quod cuique ipsius x functioni y accedit; dummodo pro quovis ipsius y valore functiones P, Q, R, S, &c. definire valeamus. In hoc autem capite, atque in universa Analysi infinitorum augmentum illud ω, quo quantitatem variabilem x crescere sumsimus, statuemus infinite parvum, atque adeo evanescens, seu $=0$. Unde manifestum est, incrementum seu differentiam functionis y quoque fore infinite parvam. Cum autem in hac hypothesi singuli termini expressionis

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \&c.$$

prae antecedentibus evanescant, (88. & seqq.), solus primus

Pω

$P\omega$ remanebit, eritque propterea hoc casu, quo ω est infinite parvum, differentia ipsius y nempe $\Delta y = P\omega$.

114. Erit ergo Analysis infinitorum, quam hic tractare coepimus, nil aliud, nisi casus particularis methodi differentiarum in capite primo expositae, qui oritur, dum differentiae, quae ante finitae erant assumtae, statuantur infinite parvae. Quo igitur iste casus, quo universa Analysis infinitorum continetur, a methodo differentiarum distinguatur, cum peculiaribus nominibus, tum etiam signis ad differentias istas infinite parvas denotandas uti conveniet. Differentias igitur infinite parvas hic cum LEIBNIZIO *differentialia* vocabimus; atque cum differentiarum in primo capite diversos ordines constituissemus, ex iis nunc facile quoque intelligetur, quid differentialia prima, secunda, tertia, &c. cuiusque functionis significent. Loco characteris autem Δ, quo ante differentias indicaveramus, nunc utemur charactere d; ita ut dy significet differentiale primum ipsius y; ddy differentiale secundum; d^3y tertium & ita porro.

115. Quoniam differentias infinite parvas, quas hic tractamus *differentialia* vocamus, hinc totus calculus, quo differentialia investigantur, atque ad usum accomodantur, appellari solet *Calculus differentialis*. Mathematici Angli, inter quos primum NEWTONUS aeque ac LEIBNIZIUS inter Germanos hanc novam Analyseos partem excollere coepit, aliis tam nominibus quam signis utuntur. Differentias enim infinite parvas, quas nos differentialia vocamus potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa*: quae voces uti latino sermoni magis conveniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quae primum a NEWTONO ad celeritatem crescendi adhibebatur, ad incrementum infinite parvum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

116. Quamvis autem circa vocum usum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram iudice puritatem latinae linguae atque expressionum commoditatem spectante facile superaremur; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam praeripiamus. Differentialia enim, quae ipsi fluxiones appellant, punctis, quae litteris superscribunt, denotare solent, ita ut $\dot{y}$ iis significet fluxionem primam ipsius y; $\ddot{y}$ fluxionem secundam; $\dddot{y}$ fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, uti ab arbitrio pendens, etsi improbari nequit, si punctorum numerus fuerit parvus, ut numerando facile percipi queat, tamen si plura puncta inscribi debeant, maximam confusionem plurimaque incommoda affert. Differentiale enim seu fluxio decima perquam incommode hoc modo $\overset{\vdots\vdots}{y}$ repraesentatur, cum nostro signandi modo $d^{10}y$ facillime comprehendatur. Oriuntur autem casus, quibus multo adhuc superiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorsus fit ineptus.

117. Nostris igitur tam nominibus quam signis utemur, quippe quorum illa in nostris regionibus iam sunt usu recepta atque plerisque familiaria, haec vero commodiora. Interim tamen non abs re erat, Anglorum denominationes & signationes hic commemorare, ut qui eorum libros evolvunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli suo mori tam pertinaciter adhaerent, ut quae nostro more sunt scripta, prorsus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipsorum opera maxima cum aviditate perlegimus, ex iisque summum fructum percipimus; saepenumero vero etiam animadvertimus, ipsos nostratium scripta non sine utilitate legisse. Quamobrem etsi idem ubique atque aequabilis modus cogitata sua exprimendi maxime esset optandus, tamen non admodum est difficile, ut utrique assuescamus, quantum quidem

dem intelligentia librorum alieno more scriptorum postulat.

118. Cum igitur littera ω nobis hactenus denotaverit differentiam seu incrementum, quo quantitas variabilis x crescere concipitur, nunc autem ω statuatur infinite parvum, erit ω differentiale ipsius x; & hancobrem recepto signandi modo erit $\omega = dx$; atque dx proinde erit differentia infinite parva, qua ipsa x crescere concipitur. Simili modo differentiale ipsius y ita exprimetur dy; atque si y fuerit functio quaecumque ipsius x, differentiale dy denotabit incrementum, quod functio y capit, dum x abit in $x + dx$. Quare si in functione y ubique loco x substituatur $x + dx$, & quantitas resultans ponatur $= y^{I}$, erit $dy = y^{I} - y$, hocque modo differentiale cuiusque functionis reperietur: quod quidem intelligendum est de differentiali primo seu primi ordinis; de reliquis enim postea videbimus.

119. Probe ergo tenendum est litteram d hic non quantitatem denotare, sed tantum loco signi adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo in doctrina logarithmorum littera l pro signo logarithmi, & in Algebra charactere $\surd$ pro signo radicis uti consuevimus. Hinc dy non significat, uti vulgo in Analysi usu est receptum, productum ex quantitate d in quantitatem y, sed ita enunciari debet, ut dicatur differentiale ipsius y. Simili modo si scribatur $d^2 y$, neque binarius exponentem, neque d^2 potestatem ipsius d significat, sed adhibetur tantum ad nomen *differentialis secundi* breviter & apte exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, sed signum tantum exhibeat, ad confusionem vitandam in calculis, ubi plures quantitates constantes occurrunt, littera d ad earum designationem usurpari nequit; perinde atque evitare solemus litteram l tanquam quantitatem in calculum inducere, ubi simul logarithmi occurrunt. Optandum autem esset, ut litterae istae d & l per characteres aliquantulum alteratos exprimerentur, ne cum litteris Alphabethi, quibus quantitates de-

ſignari ſolent, confundantur: ſimili ſcilicet modo, quo loco litterae r, qua primum vox radicis indicabatur, nunc character iſte diſtortus $\surd$ in uſum eſt receptus.

120. Quoniam igitur vidimus differentiale primum ipſius y, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, habiturum eſſe huiuſmodi formam $P\omega$; ob $\omega = dx$, erit $dy = Pdx$. Qualiſcunque ſcilicet fuerit y functio ipſius x, eius differentiale dy exprimetur certa quadam functione ipſius x, pro qua hic ponimus P, per differentiale ipſius x, nempe per dx multiplicata. Etiamſi ergo differentialia ipſarum x & y revera ſint infinite parva, ideoque nihilo aequalia; tamen inter ſe finitam habebunt rationem: erit ſcilicet $dy : dx = P : 1$. Inventa ergo functione iſta P, innoteſcit ratio inter differentiale dx & differentiale dy. Cum igitur calculus differentialis in inventione differentialium conſiſtat, in eo non tam ipſa differentialia, quae ſunt nihilo aequalia ac propterea nullo labore invenirentur, quam eorum ratio mutua geometrica inveſtigatur.

121. Differentialia igitur multo faciſius inveniuntur, quam differentiae finitae. Ad differentiam enim finitam Δy, qua functio y creſcit, dum quantitas variabilis x incrementum ω accipit, non ſufficit functionem P noſſe, ſed indagari inſuper oportet functiones Q, R, S, &c. quae in differentiam finitam, quam poſuimus

$$= P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$$

ingrediuntur; ad differentiale ipſius y autem inveniendum ſatis eſt, ſi noverimus ſolam functionem P. Quamobrem ex cognita differentia finita cuiuſque functionis ipſius x, facillime eius differentiale definitur; verum contra ex differentiali eius functionis, nondum erui poteſt eius differentia finita. Interim tamen infra docebitur, quemadmodum ex differentialibus omnium ordinum ſimul cognitis differentia quaevis finita cuiuſque functionis propoſitae inveniri queat. Ceterum ex his

ma-

manifestum est differentiale primum $dy = Pdx$, praebere terminum primum differentiae finitae, quippe qui est $= P\omega$.

122. Si igitur incrementum ω, quod quantitas variabilis x accipere concipitur, fuerit vehementer parvum, ita ut in expressione $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 +$ &c. termini $Q\omega^2$ & $R\omega^3$, multoque magis reliqui, fiant tam parvi, ut in computo, quo summus rigor non observatur, prae primo $P\omega$ negligi queant; tum cognito differentiali Pdx, ex eo differentia finita vero proxime cognoscetur, quippe quae erit $= P\omega$: unde in pluribus occasionibus, quibus calculus ad praxin adhibetur, non parum fructus hauritur. Atque hinc nonnulli arbitrantur, differentialia tanquam incrementa vehementer parva considerari posse, eaque nihilo revera aequalia esse negant, atque tantum indefinite parva statuunt. Haecque idea aliis occasionem praebuit Analysin infinitorum accusandi, quod non veras rerum quantitates eliciat, sed tantum vero proximas; quae obiectio semper aliquam vim retineret, nisi infinite parva prorsus nihilo aequalia statueremus.

123. Qui autem nolunt infinite parva plane in nihilum abire, ii ut vim obiectionis destruere videantur, differentialia comparant minimis pulvisculis ratione totius terrae; cuius quantitatem nemo non veram tradidisse censeretur, qui unico pulvisculo a veritate aberraverit. Talem igitur rationem inter quantitatem finitam & infinite parvam esse volunt, qualis est inter totam terram minimumque pulvisculum: atque si cui hoc discrimen adhuc non satis magnum videatur, eam rationem millies magisque adaugent, ut parvitas amplius omnino percipi nequeat. Interim tamen agnoscere coguntur, summum rigorem geometricum aliquantulum infringi; quare quo huic obiectioni occurrant, ad eiusmodi exempla confugiunt, quorum tam per Geometriam quam per Analysin infinitorum solutiones inveniri possunt, ex earumque congruentia bonitatem posterioris methodi concludunt. Quanquam autem hoc argumentum negotium non conficit, cum saepenume-

ro per erroneas methodos verum elici queat; tamen quia hoc vitio non laborat, potius evincit, eas quantitates, quae in calculo sint neglectae, non solum non incomprehensibiliter parvas, sed plane nullas esse, uti nos assumimus. Ex quo rigori geometrico nullam omnino vim inferimus.

124. Progrediamur ad differentialium secundi ordinis naturam explicandam, quae oriuntur ex differentiis secundis in capite primo expositis, ponendo quantitatem ω infinite parvam $= dx$. Cum igitur si ponamus quantitatem variabilem x aequalibus incrementis crescere, ita ut si valor secundus x^{I} fuerit $= x + dx$, sequentes futuri sint $x^{II} = x + 2dx$; $x^{III} = x + 3dx$ &c. ob differentias primas constantes $= dx$, differentiae secundae evanescent: erit ergo quoque differentiale secundum ipsius x nempe $ddx = 0$, atque ab hanc rationem quoque differentialia ulteriora erunt $= 0$, scilicet $d^3x = 0$; $d^4x = 0$; $d^5x = 0$; &c. Obiici quidem potest, haec differentialia, cum sint infinite parva, per se esse $= 0$, neque hoc proprium esse eius quantitatis variabilis x, cuius incrementa aequalia concipiantur: at vero hanc evanescentiam ita interpretari oportet, ut differentialia ddx, d^3x &c. non solum in se spectata sint nulla, sed etiam ratione potestatum ipsius dx, cum quibus alias comparari possent, evanescere.

125. Quae quo clarius intelligantur, recordandum est differentiam secundam cuiusque functionis ipsius x, quae sit y, huiusmodi forma exprimi $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \&c.$ Quodsi ergo ω sit infinite parvum, termini $Q\omega^3$, $R\omega^4$ &c. prae primo $P\omega^2$ evanescent, unde posito $\omega = dx$, differentiale secundum ipsius y erit $= Pdx^2$, denotante dx^2 quadratum differentialis dx. Quare etsi differentiale secundum ipsius y, nempe ddy per se sit $= 0$, tamen cum sit $ddy = Pdx^2$, ad dx^2 habebit rationem finitam uti P ad 1: sin autem sit $y = x$, tum fit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque hoc casu differentiale secundum ipsius x etiam respectu dx^2 altiorumque ipsius dx potestatum evanescit. Hocque modo intelligenda sunt

ea,

ea, quae ante diximus, esse scilicet $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c.

126. Cum differentia secunda nil aliud sit, nisi differentia differentiae primae; differentiale quoque secundum seu uti saepe vocari solet, differentio-differentiale nil aliud erit praeter differentiale differentialis primi. Quia deinde quantitas constans nulla neque augmenta neque decrementa accipit, nullasque admittit differentias, quippe quae solis quantitatibus variabilibus sunt propriae, dicimus eodem sensu quantitatum constantium differentialia omnia cuiusque ordinis esse $= 0$, hoc est prae omnibus adeo potestatibus ipsius dx evanescere. Cum igitur differentiale ipsius dx hoc est ddx sit $= 0$; differentiale dx tanquam quantitas constans considerari potest, & quoties differentiale cuiuspiam quantitatis dicitur constans, toties ea quantitas intelligenda est continuo aequalia incrementa accipere. Sumimus hic autem x pro ea quantitate, cuius differentiale sit constans, hicque singularum eius functionum variabilitatem, cui earum differentialia sunt obnoxia, aestimabimus.

127. Ponamus differentiale primum ipsius y esse $= pdx$; atque ad eius differentiale secundum inveniendum, ipsius pdx denuo differentiale quaeri debet. Cum autem dx sit constans, neque varietur etiamsi loco x scribatur $x+dx$, tantum opus est, ut quantitatis finitae p differentiale quaeratur: sit igitur $dp = qdx$, quoniam vidimus omnium functionum ipsius x differentialia ad huiusmodi formam revocari; & cum sit, uti de differentiis finitis ostendimus, differentiale ipsius $np = nqdx$, si n sit quantitas constans, ponatur dx loco n, eritque differentiale ipsius $pdx = qdx^2$. Hancobrem si sit $dy = pdx$ & $dp = qdx$, erit differentiale secundum $ddy = qdx^2$, sicque constat, quod iam ante innuimus, differentiale secundum ipsius y ad dx^2 habere rationem finitam.

128. In Capite primo iam notavimus differentias secundas atque sequentes constitui non posse, nisi valores successivi ipsius x certa quadam lege progredi assumantur, quae

lex

lex cum sit arbitraria, his valoribus progressionem arithmeticam tanquam facillimam simulque aptissimam tribuimus. Ob eandem ergo rationem de differentialibus secundis nihil certi statui poterit, nisi differentialia prima, quibus quantitas variabilis x continuo crescere concipitur, secundum datam legem progrediantur; ponimus itaque differentialia prima ipsius x, nempe dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. omnia inter se aequalia, unde fiunt differentialia secunda

$$ddx = dx^{I} - dx = 0; \; ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0, \text{ \&c.}$$

Quoniam ergo differentialia secunda & ulteriora ab ordine, quem differentialia quantitatis variabilis x inter se tenent, pendent, hicque ordo sit arbitrarius, quae conditio differentialia prima non afficit; hinc ingens discrimen inter differentialia prima ac sequentia ratione inventionis intercedit.

129. Quodsi autem successivi ipsius x valores x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, &c. non secundum arithmeticam progressionem statuantur, sed alia quacumque lege progredi ponantur, tum eorum quoque differentialia prima dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. non erunt inter se aequalia, neque propterea erit $ddx = 0$. Hancobrem differentialia secunda quarumvis functionum ipsius x aliam formam induent; si enim huiusmodi functionis y differentiale primum fuerit $= p\,dx$ ad eius differentiale secundum inveniendum non sufficit differentiale ipsius p per dx multiplicasse, sed insuper ratio differentialis ipsius dx, quod est ddx haberi debet. Quoniam enim differentiale secundum oritur, si pdx a valore eius sequente, qui oritur dum $x + dx$ loco x & $dx + ddx$ loco dx ponitur, subtrahatur ponamus valorem ipsius p sequentem esse $= p + q\,dx$, eritque ipsius $p\,dx$ valor sequens

$$= (p + qdx)\,(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx;$$

a quo subtrahatur pdx, eritque differentiale secundum

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

quia $qdxddx$ prae $pddx$ evanescit.

130.

130. Quanquam autem ratio aequalitatis est simplicissima atque aptissima, quae continuo ipsius x incrementis tribuatur, tamen frequenter evenire solet, ut non eius quantitatis variabilis x, cuius y est functio, incrementa aequalia assumantur, sed alius cuiuspiam quantitatis, cuius ipsa x sit functio quaedam. Quin etiam saepe eiusmodi alius quantitatis differentialia prima statuuntur aequalia, cuius nequidem relatio ad x constet. Priori casu pendebunt differentialia secunda & sequentia ipsius x a ratione, quam x tenet ad illam quantitatem, quae aequabiliter crescere ponitur, ex eaque pari modo definiri debent, quo hic differentialia secunda ipsius y ex differentialibus ipsius x definire docuimus. Posteriori autem casu differentialia secunda & sequentia ipsius x tanquam incognita spectari, eorumque loco signa ddx, d^3x, d^4x, &c. usurpari debebunt.

131. Cum autem, quemadmodum his casibus differentiationes singulas absolvi oporteat, infra fusius simus ostensuri, hic pergamus quantitatem variabilem x tanquam uniformiter crescentem assumere, ita ut eius differentialia prima dx, dx^{I}, dx^{II}, &c. inter se omnia aequalia, ac propterea differentialia secunda ac sequentia nihilo aequalia statuantur, quae conditio ita enunciari solet ut differentiale ipsius x nempe dx constans assumi dicatur. Sit deinde y functio quaecumque ipsius x, quae cum per x & constantes definiatur, singula quoque eius differentialia prima, secunda, tertia, quarta, &c. quae his signis indicantur dy, ddy, d^3y, d^4y, &c. per x & dx exprimi poterunt. Scilicet si in y loco x scribatur $x+dx$, ab hocque valore prior subtrahatur, remanebit differentiale primum dy: in quo si porro loco x ponatur $x+dx$, prodibit dy^{I}, eritque $ddy = dy^{I} - dy$, simili modo ponendo $x+dx$ loco x, ex ddy nascetur ddy^{I}, atque $ddy^{I} - ddy$ dabit d^3y & ita porro: in quibus operationibus differentiale dx perpetuo tanquam quantitas constans spectatur, quae nullum differentiale recipiat.

132. Ex ratione, qua functio y per x determinatur, tam ope methodi differentiarum finitarum, quam multo ex-

peditius ex iis, quae postea sumus tradituri, definietur valor functionis p, quae per dx multiplicata praebeat differentiale primum dy. Posito ergo $dy = pdx$, differentiale ipsius pdx dabit differentiale secundum ddy; unde si fuerit $dp = qdx$, ob dx constans, orietur $ddy = qdx^2$, uti iam ante ostendimus. Ulterius igitur progrediendo, cum differentialis secundi differentiale praebeat differentiale tertium, ponamus esse $dq = rdx$, eritque $d^3y = rdx^3$: simili modo si huius functionis r differentiale quaeratur, fueritque $dr = sdx$, habebitur differentiale quartum $d^4y = sdx^4$; sicque porro, dummodo noverimus differentiale primum cuiusque functionis invenire, differentiale cuiusque ordinis assignare poterimus.

133. Quo igitur formae singulorum horum differentialium, simulque ratio ea inveniendi clarius menti repraesentetur, ea sequenti tabella complecti visum est.

Si y fuerit functio quaecunque ipsius x,

atque posito	erit
$dp = qdx$	$dy = pdx$
$dq = rdx$	$ddy = qdx^2$
$dr = sdx$	$d^3y = rdx^3$
$ds = tdx$	$d^4y = sdx^4$
&c.	$d^5y = tdx^5$

Cum igitur functio p ex functione y per differentiationem cognoscatur, similique modo ex p inveniatur q, hincque porro r, & ex eo ulterius s, &c. differentialia cuiusvis ordinis ipsius y facile reperientur, dummodo differentiale dx assumatur constans.

134. Cum p, q, r, s, t, &c. sint quantitates finitae, functiones nimirum ipsius x, differentiale primum ipsius y, rationem finitam habebit ad differentiale primum ipsius x, scilicet ut p ad 1; hancque ob causam differentialia dx & dy vocantur homogenea. Deinde cum ddy ad dx^2 habeat rationem finitam ut q ad 1, erunt ddy & dx^2 homogenea; simili modo homogenea erunt d^3y & dx^3, itemque d^4y & dx^4, & ita porro. Unde uti differentialia prima sunt inter se ho-

mo-

mogenea, seu rationem finitam tenentia; sic differentialia secunda cum quadratis differentialium primorum, differentialia autem tertia cum cubis differentialium primorum atque ita porro erunt homogenea. Atque generatim differentiale ipsius y ordinis n, quod ita exprimitur $d^n y$, homogeneum erit cum dx^n, hoc est cum potestate differentialis dx, cuius exponens est n.

135. Cum igitur prae dx evanescant omnes eius potestates, quarum exponentes sunt unitate maiores, prae dy quoque evanescent dx^2, dx^3, dx^4, &c. & quae ad has potestates rationem finitam tenent differentialia altiorum ordinum ddy, $d^3 y$, $d^4 y$, &c. Simili modo prae ddy quia est homogeneum cum dx^2, omnes ipsius dx potestates quadrato superiores dx^3, dx^4, &c. evanescent, evanescent ergo quoque $d^3 y$, $d^4 y$, &c. Atque prae $d^3 y$, evanescent dx^4, $d^4 y$; dx^5, $d^5 y$, &c. Hincque facile, si propositae fuerint quaecunque expressiones huiusmodi differentialia involventes, dignosci poterunt, utrum sint homogeneae nec ne. Respici enim debebunt tantum differentialia, omissis quantitatibus finitis, quippe quae homogeneitatem non turbant; atque pro differentialibus secundi altiorumque ordinum scribantur potestates ipsius dx ipsis homogeneae, quae si praebeant ubique eundem dimensionum numerum, expressiones erunt homogeneae.

136. Ita patebit has expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3 y$ esse inter se homogeneas. Nam ddy^2 denotat quadratum ipsius ddy, & quia ddy homogeneum est cum dx^2, erit ddy^2 homogeneum cum dx^4. Deinde quia dy cum dx & $d^3 y$ cum dx^3 homogeneum est, erit productum $dyd^3 y$ cum dx^4 homogeneum: ex quo sequitur expressiones $Pddy^2$ & $Qdyd^3 y$ inter se esse homogeneas, ideoque rationem inter se finitam habere. Simili modo colligetur has expressiones $\frac{Pd^3 y^2}{dxddy}$ & $\frac{Qd^5 y}{dy^2}$ esse homogeneas; substitutis enim pro dy, ddy, $d^3 y$ & $d^5 y$ his ipsius dx potestatibus ipsis homogeneis dx, dx^2, dx^3, & dx^5, orientur hae expressiones Pdx^3 & Qdx^3, quae utique erunt inter se homogeneae.

137. Quod si facta hac reductione expressiones propositae non contineant aequales ipsius dx potestates, tum non erunt homogeneae, neque propterea inter se rationem finitam tenebunt. Erit ergo altera infinities sive maior sive minor altera, hincque una respectu alterius evanescet. Sic $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ ad $\frac{Qddy^2}{dy}$ rationem habebit infinite magnam: prior enim expressio reducitur ad Pdx & altera ad Qdx^3, unde haec prae illa evanescet. Quamobrem si in quopiam calculo aggregatum huiusmodi binarum formularum occurrat, $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$, posterior terminus prae priori tuto reiici, solusque primus $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ in calculo retineri poterit: subsistet enim perfecta ratio aequalitatis inter expressiones $\frac{Pd^3y}{dx^2} + \frac{Qddy^2}{dy}$ & $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ quia exponens rationis est

$$= 1 + \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 1 \text{ ob } \frac{Qdx^2ddy^2}{Pdyd^3y} = 0.$$

Hocque pacto expressiones differentiales quandoque mirifice contrahi possunt.

138. In calculo differentiali praecepta traduntur, quorum ope cuiusvis quantitatis propositae differentiale primum inveniri potest: & quoniam differentialia secunda ex differentiatione primorum, tertia per eandem operationem ex secundis & ita porro sequentia ex praecedentibus reperiuntur, calculus differentialis continet methodum omnia cuiusque ordinis differentialia inveniendi. Ex voce autem *differentialis*, qua differentia infinite parva denotatur, alia nomina derivantur, quae usu sunt recepta. Sic verbum habetur *differentiare*, quod significat *differentiale invenire*, quantitasque *differentiari* dicitur, quando eius differentiale elicitur. *Differentiatio* autem de-

no-

notat operationem, qua differentialia inveniuntur. Hinc calculus differentialis quoque vocatur methodus *differentiandi*, cum modum differentialia inveniendi contineat.

139. Quemadmodum in calculo differentiali cuiusvis quantitatis differentiale investigatur, ita vicissim calculi species constituitur quoque in inventione eius quantitatis, cuius differentiale proponitur, qui calculus integralis vocatur. Si enim propositum fuerit differentiale quodcunque, eius respectu ea quantitas, cuius est differentiale, vocari solet integrale. Cuius denominationis ratio est, quod, cum differentiale considerari possit, tanquam pars infinite parva, qua quantitas quaepiam crescit; ipsa illa quantitas respectu huius partis tanquam totum seu integrum spectari potest, hancque ob causam eius vocatur integrale. Sic cum dy sit differentiale ipsius y, vicissim y erit integrale ipsius dy, & cum ddy sit differentiale ipsius dy, erit dy integrale ipsius ddy, similique modo erit ddy integrale ipsius d^3y, & d^3y ipsius d^4y & ita porro: unde quaelibet differentiatio, si inverse spectatur, integrationis exemplum exhibet.

140. Origo & natura integralium pariter ac differentialium clarissime ex differentiarum finitarum doctrina in capite primo exposita explicari potest. Postquam enim esset ostensum, quomodo cuiusque quantitatis differentiam inveniri oporteat, retrogrediendo quoque monstravimus, quomodo, si proposita fuerit differentia, ea quantitas inveniri queat, cuius illa sit differentia; quam quantitatem respectu suae differentiae vocavimus eius summam. Uti igitur ad infinite parva procedendo differentiae in differentialia abierunt, ita summae quae ibi erant vocatae, integralium nomen sortiuntur: & hanc ob causam integralia quoque non raro summae appellari solent. Angli qui differentialia fluxiones nominant, integralia vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more datae fluxionis fluentem invenire, idem est, quod nostro more dati differentialis integrale invenire dicimus.

141. Uti differentialia charactere d designamus, ita ad

in-

integralia indicanda hac littera $\int$ utimur, quae ergo quantitatibus differentialibus praefixa eas denotabit quantitates, quarum illa sunt differentialia. Sic si differentiale ipsius y fuerit pdx, seu $dy = pdx$, erit y integrale ipsius pdx, quod hoc modo scribitur $y = \int pdx$, cum sit $y = \int dy$. Integrale ergo ipsius pdx, quod per $\int pdx$ indicatur, denotat quantitatem, cuius differentiale est pdx. Simili modo cum sit $ddy = qdx^2$ existente $dp = qdx$; erit integrale ipsius ddy hoc est $dy = pdx$, atque ob $p = \int qdx$, erit $dy = dx\int qdx$, ac propterea $y = \int dx\int qdx$. Si ulterius sit $dq = rdx$, erit $q = \int rdx$ & $dp = dx\int rdx$; unde si character $\int$ denuo praefigatur, fiet $p = \int dx\int rdx$, porroque $dy = dx\int dx\int rdx$, atque $y = \int dx\int dx\int rdx$.

142. Quia differentiale dy est quantitas infinite parva, eius integrale autem y quantitas finita, parique modo differentiale secundum ddy infinities minus est, quam eius integrale dy, manifestum est differentialia prae suis integralibus evanescere. Quae affectio quo melius percipiatur, infinite parva in ordines dividi solent, diciturque infinite parvum primi ordinis, ad quod referuntur differentialia prima dx, dy. Infinite parvum secundi ordinis complectitur differentialia secundi ordinis, quae homogenea sunt cum dx^2; similique modo infinite parva, quae cum dx^3 sunt homogenea, vocantur ordinis tertii, ad quem ergo pertinent differentialia tertia omnia; sicque porro. Unde uti infinite parva primi ordinis prae quantitatibus finitis evanescunt, sic infinite parva secundi ordinis prae infinite parvis primi ordinis, atque generatim infinite parva cuiusque ordinis altioris prae infinite parvis ordinis inferioris evanescent.

143. His igitur infinite parvorum ordinibus constitutis, uti differentiale quantitatis finitae est infinite parvum primi ordinis, atque differentiale infinite parvi primi ordinis est infinite parvum secundi ordinis, & ita porro; ita vicissim manifestum est integrale infinite parvi primi ordinis esse quantitatem finitam, integrale autem infinite parvi secundi ordinis esse infinite parvum primi ordinis sicque deinceps.

Qua-

Quare si differentiale propositum fuerit infinite parvum ordinis n, eius integrale erit infinite parvum ordinis $n-1$; hincque uti differentiando ordo infinite parvorum augetur, ita integratione ad ordines inferiores progredimur, donec ad ipsas quantitates finitas perveniamus. Sin autem quantitates finitas denuo integrare velimus, tum secundum hanc legem perveniemus ad quantitates infinite magnas, ab harumque integratione instituta ad quantitates adhuc infinities maiores, sicque progrediendo obtinebimus similes infinitorum ordines, quorum quisque praecedentem infinities superat.

144. Superest ut in hoc Capite quaedam de usu signorum recepto moneamus, ne ambiguitati ullus locus relinquatur. Ac primo quidem signum differentiationis d tantum afficit litteram immediate sequentem solam: sic dxy non denotat differentiale producti xy, sed differentiale ipsius x per ipsam quantitatem y multiplicatum. Solet autem, quominus confusio nascatur, quantitas y ante signum d hoc modo scribi ydx, quo productum ex y in dx indicatur. Attamen si y sit quantitas vel signum radicale $\surd$ vel logarithmicum habens praefixum; tum post differentiale poni solet: nimirum $dx\surd(aa-xx)$ significat productum ex quantitate finita $\surd(aa-xx)$ in differentiale dx, similique modo $dxl(1+x)$ est productum ex logarithmo quantitatis $1+x$, per dx multiplicato. Ob eandem rationem $ddy\surd x$ exprimit productum differentialis secundi ddy & quantitatis finitae $\surd x$.

145. Neque vero signum d litteram immediate sequentem solam afficit, sed etiam nequidem exponentem, si quem habet, spectat. Ita dx^2 non exprimit differentiale ipsius x^2, sed quadratum differentialis ipsius x, ita ut exponens 2 non ad x, sed ad dx referri debeat. Posset etiam scribi $dxdx$, quemadmodum productum duorum differentialium dx & dy hoc modo $dxdy$ exponitur, verum prior modus dx^2, uti est brevior, ita usitatior. Praesertim si altiores potestates ipsius dx essent indicandae, nimis prolixum foret dx toties repeti: sic dx^3 denotat cubum ipsius dx, & in differentialibus altiorum

rum

rum ordinum similis ratio observatur. Scilicet ddy^4 denotat potestatem quartam differentialis secundi ordinis ddy; atque $d^3y^2\sqrt{x}$ significat quadratum differentialis tertii ordinis ipsius y multiplicatum esse per $\sqrt{x}$; sin autem per quantitatem rationalem x multiplicari deberet, ea praefigitur hoc modo xd^3y^2.

146. Sin autem velimus, ut signum d plus quam solam litteram subsequentem afficiat, id peculiari modo indicari debet. Utimur hoc casu praecipue uncinulis, quibus ea quantitas includitur, cuius differentiale debet indicare. Uti $d(xx+yy)$ denotat differentiale quantitatis $xx+yy$; verum si velimus differentiale potestatis huiusmodi quantitatis designare, ambiguitatem vix evitare possumus: si enim scribamus $d(xx+yy)^2$, intelligi posset quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Poterimus autem hoc casu punctum in auxilium vocare, ita ut $d.(xx+yy)^2$ denotet differentiale ipsius $(xx+yy)^2$, omisso autem puncto $d(xx+yy)^2$ quadratum ipsius $d(xx+yy)$. Puncto scilicet commode indicari potest signum d ad totam quantitatem post punctum sequentem pertinere: sic $d.xdy$ exprimet differentiale ipsius xdy; & $d.^3 xdy\sqrt{(aa+xx)}$ differentiale tertii ordinis expressionis $xdy\sqrt{(aa+xx)}$, quae est productum ex quantitatibus finitis x & $\sqrt{(aa+xx)}$ atque ex differentiali dy.

147. Quemadmodum autem signum differentiationis d solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito eius vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita contra signum integrationis $\int$ semper totam expressionem, cui est praefixum, complectitur. Ita $\int ydx(aa-xx)^n$ denotat integrale seu eam quantitatem, cuius differentiale est $ydx(aa-xx)^n$, atque haec expressio $\int xdx\int dxlx$ denotat quantitatem, cuius differentiale est $xdx\int dxlx$. Hinc si velimus productum duorum integralium scilicet $\int ydx$ & $\int zdx$ exprimere, id hoc modo $\int ydx\int zdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis $ydx\int zdx$. Hanc ob causam iterum puncto solet haec ambiguitas tolli, ita ut $\int ydx\,.\int zdx$ significet productum integralium $\int ydx$ & $\int zdx$.

148. Analysis infinitorum igitur cum in differentiali-

bus

bus tum in integralibus inveniendis verſatur, & hancobrem in duas praecipuas partes dividitur, quarum altera vocatur Calculus differentialis, altera Calculus integralis. In priori praecepta traduntur, quantitatum quarumvis differentialia inveniendi; in poſteriori vero via monſtratur differentialium propoſitorum integralia inveſtigandi: in utroque autem ſimul ſummus uſus, quem iſti calculi tam ad ipſam Analyſin quam ad Geometriam ſublimiorem afferunt, indicatur. Quam ob cauſam iſta Analyſeos pars iam tanta accepit incrementa, ut modico volumine prorſus comprehendi nequeat. Imprimis vero in calculo integrali indies tam nova artificia integrandi, quam adiumenta eius in ſolvendis varii generis problematibus, deteguntur, ut ob haec nova inventa, quae continuo accedunt, nunquam exhauriri, multo minus perfecte deſcribi atque explicari poſſit. Dabo autem operam, ut quae adhuc ſunt reperta, vel cuncta in his libris exponam, vel ſaltem methodos explicem, unde ea facile deduci queant.

149. Solent vulgo plures Analyſeos infinitorum partes numerari; praeter calculos enim differentialem & integralem inveniuntur paſſim calculi differentio-differentialis atque exponentialis. In calculo differentio-differentiali tradi ſolet methodus differentialia ſecundi atque altiorum ordinum inveniendi: quoniam autem modum cuiuſque ordinis differentialia inveniendi in ipſo calculo differentiali ſum expoſiturus, hac ſubdiviſione, quae potius ex merito inventionis, quam ex re ipſa facta eſſe videtur, ſuperſedebimus. Quod deinde ad calculum exponentialem attinet, quo Celeb. IOH. BERNOULLI, cui ob innumera eaque maxima incrementa Analyſeos infinitorum aeternas debemus gratias, methodos differentiandi atque integrandi ad quantitates exponentiales tranſtulit, quia utrumque calculum ad omnis generis quantitates tam algebraicas quam tranſcendentes accommodare conſtitui, hinc partem peculiarem facere ſuperfluum atque inſtituto contrarium foret.

150. Primum igitur calculum differentialem in hoc libro pertractare statui, modumque sum expositurus, cuius ope omnium quantitatum variabilium differentialia non solum prima, sed etiam secunda & altiorum ordinum expedite inveniri queant. Primum ergo quantitates algebraicas contemplabor, sive sint functiones unius variabilis, sive plurium, sive demum explicite dentur, sive per aequationes. Deinde inventionem differentialium quoque accommodabo ad quantitates non algebraicas, ad quarum notitiam quidem sine calculi integralis subsidio pervenire licet: cuiusmodi sunt logarithmi, atque quantitates exponentiales; deinde etiam arcus circuli, vicissimque arcuum circularium sinus, & tangentes. Denique etiam quantitates utcunque ex his compositas & permixtas differentiare docebo; sicque calculi differentialis pars prior, methodus scilicet differentiandi absolvetur.

151. Altera pars usui, quem methodus differentiandi tam ad Analysin quam Geometriam sublimiorem affert, explicando est destinata. In Algebram autem communem inde plurima redundant commoda, partim ad radices aequationum inveniendas, partim ad series tractandas atque summandas, partim ad maxima minimaque eruenda, partim ad valores expressionum, quae certis casibus indeterminatae videantur, definiendos, & quae sunt alia. Geometria autem sublimior ex calculo differentiali maxima accepit incrementa, dum eius ope tangentes linearum curvarum, earumque curvatura ipsa mira facilitate definiri, multaque alia problemata circa radios a lineis curvis vel reflexos vel refractos resolvi possunt. Quibus etsi amplissimus tractatus impleri posset, tamen conabor, quantum fieri licet, omnia breviter ac perspicue explicare.

CA-

CAPUT V.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM UNICAM VARIABILEM INVOLVENTIUM.

152.

Quia quantitatis variabilis x differentiale est $= dx$ erit x in proximum promovendo $x^I = x + dx$. Quare si fuerit y quaecunque functio ipsius x, si in ea loco x ponatur $x + dx$, ea abibit in y^I, atque differentia $y^I - y$ dabit differentiale ipsius y. Si igitur ponamus $y = x^n$ fiet

$$y^I = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}dx^2 + \text{\&c.}$$

eritque ergo

$$dy = y^I - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}dx^2 + \text{\&c.}$$

At in hac expressione terminus secundus cum reliquis sequentibus prae primo evanescit, eritque idcirco $nx^{n-1}dx$ differentiale ipsius x^n, seu $d.x^n = nx^{n-1}dx$. Unde si a sit numerus seu quantitas constans, erit quoque $d.ax^n = nax^{n-1}dx$. Cuiuscunque ergo ipsius x potestatis differentiale invenitur, multiplicando eam per exponentem, dividendo per x, & reliquum per dx multiplicando, quae regula facile memoria retinetur.

153. Cognito differentiali primo ipsius x^n, ex eo facile differentiale secundum reperitur, dummodo, ut hic constanter assumemus, differentiale dx constans statuatur. Cum enim in differentiali $nx^{n-1}dx$ factor ndx sit constans, alterius factoris x^{n-1} differentiale sumi debet, quod proinde erit $(n-1)x^{n-2}dx$. Hoc ergo per ndx multiplicatum dabit diffe-

rentiale secundum : $dd.x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$. Simili modo si differentiale ipsius x^{n-2} quod est $= (n-2)x^{n-3}dx$ multiplicetur per $n(n-1)dx^2$ prodibit differentiale tertium

$$d.^3 x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3.$$

Porro itaque erit differentiale quartum

$$d.^4 x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4,$$

& differentiale quintum

$$d.^5 x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}dx^5;$$

unde simul forma sequentium differentialium facillime colligitur.

154. Quoties ergo n est numerus integer affirmativus, toties ad differentialia tandem pervenitur evanescentia; quae scilicet ita sunt $=0$, ut prae omnibus ipsius dx potestatibus evanescant. Horum autem notandi sunt casus simpliciores.

$d.x = dx$; $dd.x = 0$; $d.^3 x = 0$; &c.

$d.x^2 = 2xdx$; $dd.x^2 = 2dx^2$; $d.^3 x^2 = 0$; $d.^4 x^2 = 0$ &c.

$d.x^3 = 3x^2 dx$; $dd.x^3 = 6xdx^2$; $d.^3 x^3 = 6dx^3$; $d.^4 x^3 = 0$

$d.x^4 = 4x^3 dx$; $dd.x^4 = 12x^2 dx^2$; $d.^3 x^4 = 24xdx^3$; $d.^4 x^4 = 24dx^4$

$d.x^5 = 5x^4 dx$; $dd.x^5 = 20x^3 dx^2$; $d.^3 x^5 = 60x^2 dx^3$; $d.^4 x^5 = 120xdx^4$; $d.^5 x^5 = 120dx^5$; $d.^6 x^5 = 0$.

Patet ergo si n fuerit numerus integer affirmativus, potestatis x^n differentiale ordinis n esse constans, nempe $= 1.2.3.\ldots n dx^n$, adeoque differentialia superiorum ordinum omnium esse $=0$.

155. Si n sit numerus integer negativus, huiusmodi ipsius x potestatum negativarum $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, &c. differentialia sumi poterunt, cum sit $\frac{1}{x} = x^{-1}$; $\frac{1}{xx} = x^{-2}$, & generaliter $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Si ergo in formula antecedente ponatur

n

$n = -m$, erit ipsius $\frac{1}{x^m}$ differentiale primum $= \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$; differentiale secundum $= \frac{m(m+1)\,dx^2}{x^{m+2}}$; differentiale tertium $= \frac{-m(m+1)(m+2)\,dx^3}{x^{m+3}}$ &c. unde sequentes casus simpliciores imprimis notari merentur.

$$d.\frac{1}{x} = \frac{-dx}{x^2};\quad dd.\frac{1}{x} = \frac{2dx^2}{x^3};\quad d.^3\frac{1}{x} = \frac{-6dx^3}{x^4}$$

$$d.\frac{1}{x^2} = \frac{-2dx}{x^3};\quad dd.\frac{1}{x^2} = \frac{6dx^2}{x^4};\quad d.^3\frac{1}{x^2} = \frac{-24dx^3}{x^5}$$

$$d.\frac{1}{x^3} = \frac{-3dx}{x^4};\quad dd.\frac{1}{x^3} = \frac{12dx^2}{x^5};\quad d.^3\frac{1}{x^3} = \frac{-60dx^3}{x^6}$$

$$d.\frac{1}{x^4} = \frac{-4dx}{x^5};\quad dd.\frac{1}{x^4} = \frac{20dx^2}{x^6};\quad d.^3\frac{1}{x^4} = \frac{-120dx^3}{x^7}$$

$$d.\frac{1}{x^5} = \frac{-5dx}{x^6};\quad dd.\frac{1}{x^5} = \frac{30dx^2}{x^7};\quad d.^3\frac{1}{x^5} = \frac{-210dx^3}{x^8}$$

&c.

156. Ponendis deinde pro n numeris fractis differentialia formularum irrationalium obtinebimus. Sit enim

$n = \frac{\mu}{\nu}$, erit formulae $x^{\frac{\mu}{\nu}}$ seu $\sqrt[\nu]{x^\mu}$ differentiale primum

$$= \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu} dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$$ secundum

$$= \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\nu} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}$$ &c.

Hinc

Hinc erit:

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\ ;\ dd.\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}\ ;\ d^3\sqrt{x} = \frac{1.3dx^3}{8x^2\sqrt{x}}$$

$$d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ dd.\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ d^3\sqrt[3]{x} = \frac{2.5dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$d.\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}\ ;\ dd.\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}\ ;\ d^3\sqrt[4]{x} = \frac{3.7dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}$$

quae expressiones si paulisper inspiciantur, facile habitus acquiretur huiusmodi differentialia, etiam sine praevia reductione ad formam potestatis, inveniendi.

157. Si μ non fuerit 1, sed numerus alius sive affirmativus sive negativus integer, differentialia aeque facile definientur. Cum autem differentialia secunda & altiorum ordinum eadem lege ex primis, qua haec ex ipsis potestatibus, deriventur, exempla simpliciora primorum tantum differentialium apponamus.

$$d.x\sqrt{x} = \tfrac{3}{2}dx\sqrt{x}\ ;\ d.x^2\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}xdx\sqrt{x}\ ;\ d.x^3\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}x^2dx\sqrt{x}\ ;$$

$$d.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}\ ;\ d.\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2xx\sqrt{x}}\ ;\ d.\frac{1}{xx\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}}\ ;$$

$$d.\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\ ;\ d.x\sqrt[3]{x} = \tfrac{4}{3}dx\sqrt[3]{x}\ ;\ d.x\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2}\ ;$$

$$d.xx\sqrt[3]{x} = \tfrac{7}{3}xdx\sqrt[3]{x}\ ;\ d.xx\sqrt[3]{x^2} = \tfrac{8}{3}xdx\sqrt[3]{x^2}\ ;\ \&c.$$

$$d.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}\ ;\ d.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4dx}{3x^2\sqrt[3]{x}}\ ;$$

$$d.\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ d.\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7dx}{3x^3\sqrt[3]{x}}\ ;\ \&c.$$

158. Ex his iam functionum omnium algebraicarum rationalium integrarum differentialia poterunt inveniri, propterea quod earum singuli termini sunt potestates ipsius x,

quas

quas differentiare novimus. Cum enim quantitas huiusmodi $p+q+r+s+$ &c. posito $x+dx$ loco x abeat in $p+dp+q+dq+r+dr+s+ds+$ &c. erit eius differentiale $=dp+dq+dr+ds+$ &c. Quare si singularum quantitatum p, q, r, s, differentialia assignare queamus, simul quoque aggregati earum differentiale innotescet. Atque cum multipli ipsius p differentiale sit aeque multiplum ipsius dp, hoc est $d.ap=adp$; erit quantitatis $ap+bq+cr$ differentiale $=adp+bdq+cdr$. Cum denique quantitatum constantium differentialia sint nulla, erit quoque quantitatis huius $ap+bq+cr+f$ differentiale $=adp+bdq+cdr$.

159. In functionibus ergo rationalibus integris cum singuli termini sint vel constantes vel potestates ipsius x, differentiatio secundum praecepta data facile absolvetur. Sic erit:

$d(a+x)=dx$; $d(a+bx)=bdx$;

$d(a+xx)=2xdx$; $d(aa-xx)=-2xdx$;

$d(a+bx+cxx)=bdx+2cxdx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3)=bdx+2cxdx+3ex^2dx$;

$d(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)=bdx+2cxdx+3ex^2dx+4fx^3dx$.

Atque si exponentes fuerint indefiniti erit:

$d(1-x^n)=-nx^{n-1}dx$; $d(1+x^m)=mx^{m-1}dx$;

$d(a+bx^m+cx^n)=mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}dx$.

160. Cum igitur functiones rationales integrae secundum maximam ipsius x dignitatem in gradus distinguantur, manifestum est, si huiusmodi functionum continuo differentialia capiantur, ea tandem fieri constantia, posteaque in nihilum abire, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic functionis primi gradus $a+bx$ differentiale primum bdx est constans, secundum cum sequentibus nullum. Sit functio secundi gradus

$$a+bx+cxx=y;\ \text{erit}\ dy=bdx+2cxdx;$$
$$ddy=2cdx^2;\ d^3y=0.$$

Si-

Simili modo si ponatur functio tertii gradus $a+bx+cxx+ex^3=y$; erit $dy=bdx+2cxdx+3exxdx$; $ddy=2cdx^2+6exdx^2$ & $d^3y=6edx^3$ atque $d^4y=0$. Quare generaliter si huiusmodi functio sit gradus n, eius differentiale ordinis n erit constans, & sequentia omnia nulla.

161. Neque etiam differentiatio turbabitur, si inter potestates ipsius x, quae huiusmodi functionem componunt, occurrant tales, quarum exponentes sint numeri negativi seu fracti. Ita

I. Si sit $y=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}$

erit $dy=\frac{bdx}{2\sqrt{x}}+\frac{cdx}{xx}$.

II. Si sit $y=\frac{a}{\sqrt{x}}+b+c\sqrt{x}-ex$

erit $dy=\frac{-adx}{2x\sqrt{x}}+\frac{cdx}{2\sqrt{x}}-edx$,

& $ddy=\frac{3adx^2}{4xx\sqrt{x}}-\frac{cdx^2}{4x\sqrt{x}}$.

III. Si sit $y=a+\frac{b}{\sqrt[3]{xx}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{f}{xx}$

erit $dy=\frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{xx}}+\frac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}}-\frac{2fdx}{x^3}$

& $ddy=\frac{10bdx^2}{9x^2\sqrt[3]{xx}}-\frac{28cdx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}}+\frac{6fdx^2}{x^4}$.

cuiusmodi exempla secundum praecepta data facillime absolvuntur.

162. Si quantitas differentianda proposita fuerit potestas eiusmodi functionis, cuius differentiale exhibere valemus, praecedentia praecepta sufficiunt ad eius differentiale primum definiendum. Sit enim p functio quaecunque ipsius x, cuius differentiale dp in potestate est, erit ipsius potestatis p^n differentiale primum $= np^{n-1}dp$. Hinc sequentia exempla solvuntur:

I. Si sit $y = (a+x)^n$; erit $dy = n(a+x)^{n-1}dx$

II. Si sit $y = (aa-xx)^2$; erit $dy = -4xdx(aa-xx)$

III. Si sit $y = \frac{1}{aa+xx}$ seu $y = (aa+xx)^{-1}$.

erit $dy = \frac{-2xdx}{(aa+xx)^2}$.

IV. Si sit $y = \surd(a+bx+cxx)$; erit $dy = \frac{bdx+2cxdx}{2\surd(a+bx+cxx)}$.

V. Si sit $y = \sqrt[3]{(a^4-x^4)^2}$ seu $y = (a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$

erit $dy = -\frac{8}{3}x^3dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{(a^4-x^4)}}$.

VI. Si sit $y = \frac{1}{\surd(1-xx)}$ seu $y = (1-xx)^{-\frac{1}{2}}$

erit $dy = xdx(1-xx)^{-\frac{3}{2}} = \frac{xdx}{(1-xx)\surd(1-xx)}$.

VII. Si sit $y = \sqrt[3]{(a+\surd bx+x)}$

erit $dy = \frac{dx\surd b:2\surd x+dx}{3\sqrt[3]{(a+\surd bx+x)^2}} = \frac{dx\surd b+2dx\surd x}{6\surd x.\sqrt[3]{(a+\surd bx+x)^2}}$.

VIII. Si sit $y = \frac{1}{x+\surd(aa-xx)}$,

ob $d.\sqrt{(aa-xx)} = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, erit

$$dy = \frac{-dx + xdx:\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2} = \frac{xdx - dx\sqrt{(aa-xx)}}{(x+\sqrt{(aa-xx)})^2\sqrt{(aa-xx)}}$$

seu $dy = \frac{dx(x-\sqrt{(aa-xx)})^3}{(2xx-aa)^2\sqrt{(aa-xx)}}$.

IX. Si sit $y = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)^3}$.

Ponatur $\frac{1}{\sqrt{x}} = p$ & $\sqrt[3]{(1-xx)^2} = q$;

ob $y = \sqrt[4]{(1-p+q)^3}$, erit $dy = \frac{-3dp+3dq}{4\sqrt[4]{(1-p+q)}}$.

Iam per antecedentia est $dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}$ & $dq = \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{(1-xx)}}$,

quibus valoribus substitutis fiet:

$$dy = \frac{3dx:2x\sqrt{x} - 4xdx:\sqrt[3]{(1-xx)}}{4\sqrt[4]{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-xx)^2}\right)}}.$$

Simili autem modo singulares litteras loco terminorum aliquantum compositorum substituendo omnium huiusmodi functionum differentialia facile eruuntur.

163. Si quantitas differentianda fuerit productum ex duabus pluribusve functionibus ipsius x, quarum differentialia constant, eius differentiale sequente modo commodissime invenietur. Sint p & q functiones ipsius x, quarum differentialia dp & dq iam sunt cognita, quia posito $x+dx$ loco x; p abit in $p+dp$ & q in $q+dq$: productum pq transmutabitur in $(p+dp)(q+dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$. Unde pro-

producti pq differentiale erit $= pdq + qdp + dpdq$; ubi cum pdq & qdp sint infinite parva primi ordinis, at $dpdq$ secundi ordinis, ultimus terminus evanescet, eritque igitur $d.pq = pdq + qdp$: Differentiale ergo producti pq constat ex duobus membris, quae obtinentur, si uterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Hinc facile deducitur differentiatio producti pqr ex tribus factoribus constantis: ponatur enim $qr = z$, fiet $pqr = pz$, & $d.\,pqr = pdz + zdp$, verum ob $z = qr$ erit $dz = qdr + rdq$, quibus valoribus loco z & dz substitutis erit. $d.\,pqr = pqdr + prdq + qrdp$.
Simili modo si quantitas differentianda quatuor habeat factores erit: $d.\,pqrs = pqrds + pqsdr + prsdq + qrsdp$:
unde quilibet differentiationem plurium factorum facile perspiciet.

I. Si ergo fuerit $y = (a + x)(b - x)$, erit

$$dy = -dx(a + x) + dx(b - x) = -adx + bdx - 2xdx$$

quod idem differentiale quoque invenitur, si quantitas proposita evolvatur: fit enim $y = ab - ax + bx - xx$, ideoque per superiora praecepta $dy = -adx + bdx - 2xdx$.

II. Si fuerit $y = \frac{1}{x}\sqrt{(aa - xx)}$.

Ponatur $\frac{1}{x} = p$ & $\sqrt{(aa - xx)} = q$, quia est $dp = \frac{-dx}{xx}$

& $dq = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, erit

$$dy = pdq + qdp = \frac{-dx}{\sqrt{(aa - xx)}} - \frac{dx}{xx}\sqrt{(aa - xx)};$$

quae ad eundem denominatorem reductae dabunt.

$\frac{-xxdx - aadx + xxdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$. Hinc erit differentiale quaesitum, $dy = \frac{-aadx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$.

III. Si fuerit $y = \frac{xx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}}$.

Ponatur $xx = p$, & $\frac{1}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = q$; quia invenimus $dp = 2x\,dx$ & $dq = \frac{-2x^3dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$pdq + qdp = \frac{-2x^5dx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2xdx}{\sqrt{(a^4 + x^4)}} = \frac{2a^4xdx}{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc ergo erit differentiale quaesitum

$$dy = \frac{2a^4x\,dx}{(a^4 + x^4)\sqrt{(a^4 + x^4)}}.$$

IV. Si fuerit $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + xx)}}$.

Ponendo $x = p$ & $\frac{1}{x + \sqrt{(1 + xx)}} = q$, ob $dp = dx$ & $dq = \frac{-dx - xdx : \sqrt{(1 + xx)}}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2} = \frac{-dx(x + \sqrt{(1 + xx)})}{(x + \sqrt{(1 + xx)})^2\sqrt{(1 + xx)}}$ $= \frac{-dx}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$, erit $pdq + qdp =$ $= \frac{-x\,dx}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}} + \frac{dx}{x + \sqrt{(1 + xx)}} =$ $= \frac{dx(\sqrt{(1 + xx)} - x)}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$. Fiet ergo differentiale quaesitum $dy = \frac{dx(\sqrt{(1 + xx)} - x)}{(x + \sqrt{(1 + xx)})\sqrt{(1 + xx)}}$; cuius fractionis si numerator ac denominator multiplicetur per $\sqrt{(1 + xx)} - x$, fiet $dy = \frac{dx(1 + 2xx - 2x\sqrt{(1 + xx)})}{\sqrt{(1 + xx)}} =$

dx

$$\frac{dx + 2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

Idem differentiale alio modo commodius inveniri potest; cum enim sit $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1+xx)}}$, multiplicetur numerator ac denominator per $\sqrt{(1+xx)} - x$, fietque

$$y = x\sqrt{(1+xx)} - xx = \sqrt{(x^2 + x^4)} - xx,$$

cuius differentiale per priorem regulam est

$$dy = \frac{xdx + 2x^3dx}{\sqrt{(xx+x^4)}} - 2xdx = \frac{dx + 2xxdx}{\sqrt{(1+xx)}} - 2xdx.$$

V. Si fuerit $y = (a+x)(b-x)(x-c)$, erit

$$dy = (a+x)(b-x)dx - (a+x)(x-c)dx + (b-x)(x-c)dx.$$

VI. Si fuerit $y = x(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)}$.

Ob tres factores ergo reperietur

$$dy = dx(aa+xx)\sqrt{(aa-xx)} + 2xxdx\sqrt{(aa-xx)} - \frac{xxdx(aa+xx)}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dx(a^4 + aaxx - 4x^4)}{\sqrt{(aa-xx)}}.$$

164. Quanquam etiam fractiones in factoribus comprehendi possunt, tamen commodius utemur regula fractionibus differentiandi inserviente. Sit ergo proposita haec fractio $\frac{p}{q}$, cuius differentiale inveniri oporteat. Quoniam posito $x+dx$ loco x fractio illa abit in

$$\frac{p+dp}{q+dq} = (p+dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{qq}\right) = \frac{p}{q} - \frac{pdq}{qq} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{qq},$$

unde si fractio ipsa $\frac{p}{q}$ subtrahatur, remanet eius differentiale

$$d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq},$$ ob evanescentem terminum $\frac{dpdq}{qq}$.

Hinc

Hinc ergo erit $d.\frac{p}{q} = \frac{q\,dp - p\,dq}{qq}$, unde haec regula pro differentiatione cuiusque fractionis enascitur. *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato subtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, residuum dividatur per quadratum denominatoris, quotusque erit differentiale fractionis quaesitum.* Cuius regulae usus per sequentia exempla illustrabitur.

I. Si fuerit $y = \frac{x}{aa + xx}$, erit per hanc regulam

$$dy = \frac{(aa + xx)\,dx - 2xx\,dx}{(aa + xx)^2} = \frac{(aa - xx)\,dx}{(aa + xx)^2}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{\sqrt{(aa + xx)}}{aa - xx}$; reperitur

$$dy = \frac{(aa - xx)\,x\,dx : \sqrt{(aa + xx)} + 2x\,dx\sqrt{(aa + xx)}}{(aa - xx)^2},$$

& facta reductione $dy = \frac{(3aa + xx)\,x\,dx}{(aa - xx)^2\sqrt{(aa + xx)}}$.

Saepenumero expedit ea regula uti, quae sequitur ex formula priori $d.\frac{p}{q} = \frac{dp}{q} - \frac{p\,dq}{qq}$, qua differentiale fractionis aequale reperitur differentiali numeratoris per denominatorem diviso, demto differentiali denominatoris per numeratorem multiplicato at per quadratum denominatoris diviso. Ita

III. Si fuerit $y = \frac{aa - xx}{a^4 + aaxx + x^4}$, erit

$$dy = \frac{-2x\,dx}{a^4 + aaxx + x^4} - \frac{(aa - xx)(2aax\,dx + 4x^3dx)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

quae ad eundem denominatorem revocata praebet.

$$dy = \frac{-2x\,dx\,(2a^4 + 2aaxx - x^4)}{(a^4 + aaxx + x^4)^2}$$

165.

165. Haec iam sufficiunt ad cuiusque functionis rationalis ipsius x propositae differentiale investigandum; si enim fuerit integra modus differentiandi iam supra est expositus. Sit igitur functio proposita fracta, quae semper ad huiusmodi formam reducetur:

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.}$$

Ponatur numerator $= p$ & denominator $= q$, ut fiat

$y = \frac{p}{q}$; eritque $dy = \frac{qdp - pdq}{qq}$. At cum sit:

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

& $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.$

erit $dp = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \&c.$

& $dq = \beta dx + 2\gamma xdx + 3\delta x^2dx + 4\varepsilon x^3dx + \&c.$

unde per multiplicationem obtinebitur:

$$\begin{array}{lllll} qdp = \alpha Bdx + & 2\alpha Cxdx + & 3\alpha Dx^2dx + & 4\alpha Ex^3dx + & \&c. \\ & \beta B & + 2\beta C & + 3\beta D & + \&c. \\ & & \gamma B & + 2\gamma C & + \&c. \\ & & & \delta B & + \&c. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} pdq = \beta Adx + & \beta Bxdx + & \beta Cx^2dx + & \beta Dx^3dx + & \&c. \\ & 2\gamma A & + 2\gamma B & + 2\gamma C & + \&c. \\ & & 3\delta A & + 3\delta B & + \&c. \\ & & & 4\varepsilon A & + \&c. \end{array}$$

Ex his itaque obtinebitur differentiale quaesitum:

$$dy = \frac{\begin{array}{l} + \alpha B \\ - \beta A \end{array} dx \begin{array}{l} + 2\alpha C \\ - 2\gamma A \end{array} xdx \begin{array}{l} + 3\alpha D \\ + \beta C \\ - \gamma B \\ - 3\delta A \end{array} xxdx \begin{array}{l} + 4\alpha E \\ + 2\beta D \\ - 2\delta B \\ - 4\varepsilon A \end{array} x^3dx \begin{array}{l} + 5\alpha F \\ + 3\beta E \\ + \gamma D \\ - \delta C \\ - 3\varepsilon B \\ - 5\zeta A \end{array} x^4dx \,\&c.}{(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \&c.)^2}$$

Quae

Quae expressio ad cuiusvis functionis rationalis differentiale expedite inveniendum maxime est accommodata. Quemadmodum enim numerator differentialis ex coefficientibus numeratoris ac denominatoris functionis propositae combinatur, ex inspectione mox intelligitur, denominator vero differentialis est quadratum denominatoris functionis propositae.

166. Si fractionis propositae vel numerator vel denominator vel uterque ex factoribus constet, multiplicatione actu instituta orietur quidem forma, qualem modo differentiavimus; attamen facilius pro his casibus regula peculiaris formabitur. Sit igitur proposita huiusmodi fractio $y = \frac{pr}{q}$. Ponatur numerator $pr = P$, ut sit $dP = pdr + rdp$. Atque ob $y = \frac{P}{q}$, erit $dy = \frac{qdP - Pdq}{qq}$ substitutis autem loco P & dP valoribus, habebitur:

I. Si fuerit $y = \frac{pr}{q}$; eius diff. $dy = \frac{pqdr + qrdp - prdq}{qq}$.

Si sit $y = \frac{p}{qs}$, posito denominatore $qs = Q$,

erit $dQ = qds + sdq$, & $dy = \frac{Qdp - pdQ}{qqss}$. Quare

II. Si fuerit $y = \frac{p}{qs}$, erit $dy = \frac{qsdp - pqds - psdq}{qqss}$.

Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$, ponatur $pr = P$ & $qs = Q$, ut habeatur $y = \frac{P}{Q}$, & $dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}$. Cum autem sit

$$dP = pdr + rdp \quad \& \quad dQ = qds + sdq,$$

prodibit sequens differentiatio:

III.

III. Si fuerit $y = \frac{pr}{qs}$,

erit $dy = \frac{pqsdr + qrsdp - pqrds - prsdq}{qqss}$,

seu $dy = \frac{rdp}{qs} + \frac{pdr}{qs} - \frac{prdq}{qqs} - \frac{prds}{qss}$.

Simili modo, si numerator ac denominator fractionis propositae plures habeant factores, differentialia eadem ratione investigabuntur; neque ad hoc ampliori manuductione erit opus. Quamobrem quoque exempla huc pertinentia praetermitto, cum mox modus generalis has omnes differentiandi methodos particulares complectens afferetur.

167. Dantur autem casus tam productorum quam fractionum, quibus differentiale commodius exprimi potest, quam per regulas generaliores hic expositas. Evenit hoc si factores, qui vel functionem ipsam, vel functionis numeratorem aut denominatorem constituunt, fuerint potestates.

Ponamus functionem differentiandam esse $y = p^m q^n$, ad cuius differentiale inveniendum sit $p^m = P$ & $q^n = Q$, ut fiat $y = PQ$ & $dy = PdQ + QdP$. Cum autem sit $dP = mp^{m-1}dp$ & $dQ = nq^{n-1}dq$, fiet his valoribus substitutis: $dy = np^m q^{n-1}dq + mp^{m-1}q^n dp = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$; unde sequens oritur regula:

I. Si fuerit $y = p^m q^n$;

erit $dy = p^{m-1}q^{n-1}(npdq + mqdp)$.

Simili modo si tres fuerint factores, differentiale invenietur, ac reperietur hoc modo expressum.

II. Si fuerit $y = p^m q^n r^k$;

erit $dy = p^{m-1}q^{n-1}r^{k-1}(mqrdp + nprdq + kpqdr)$.

168. Sin autem fuerit proposita fractio, cuius vel numerator vel denominator habeat factorem, qui est potestas, regulae quoque particulares tradi poterunt. Sit primum proposita

sita huiusmodi fractio $y = \frac{p^m}{q}$, erit per regulam fractionibus inservientem $dy = \frac{mp^{m-1}qdp - p^m dq}{qq}$, quod differentiale commodius sic exprimetur.

I. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q}$, erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - pdq)}{qq}$.

Sit iam $y = \frac{p}{q^n}$, fiet per eandem superiorem regulam $dy = \frac{q^n dp - npq^{n-1}dq}{q^{2n}}$, cuius expressionis si numerator ac denominator per q^{n-1} dividatur, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$. Quamobrem.

II. Si fuerit $y = \frac{p}{q^n}$, erit $dy = \frac{qdp - npdq}{q^{n+1}}$.

Quod si vero proponatur $y = \frac{p^m}{q^n}$; invenietur

$$dy = \frac{mp^{m-1}q^n dp - np^m q^{n-1}dq}{q^{2n}},$$ quae reducitur ad

$$dy = \frac{mp^{m-1}qdp - np^m dq}{q^{n+1}}.$$ Quocirca

III. Si fuerit $y = \frac{p^m}{q^n}$ erit $dy = \frac{p^{m-1}(mqdp - npdq)}{q^{n+1}}$.

Denique si proposita fuerit huiusmodi fractio $y = \frac{r}{p^m q^n}$, habebitur per regulam fractionum generalem

$$dy = \frac{p^m q^n dr - mp^{m-1}q^n r dp - np^m q^{n-1} r dq}{p^{2m}q^{2n}},$$

cuius expressionis cum numerator & denominator sit divisibilis per $p^{m-1}q^{n-1}$:

IV.

IV. Si fuerit $y = \frac{r}{p^m q^n}$;

erit $dy = \frac{pqdr - mqrdp - nprdq}{p^{m+1} q^{n+1}}$.

Si plures occurrant factores, huiusmodi regulae speciales, quas verbis exprimere superfluum foret, facili negotio pro quovis casu erui poterunt.

169. Regulae differentiandi quas hactenus exposuimus tam late patent, ut nulla excogitari possit functio ipsius x algebraica, quae non earum ope differentiari queat. Si enim functio ipsius x fuerit rationalis, vel erit integra vel fracta, priori casu §. 159. modum dedimus eiusmodi functiones differentiandi, posteriori vero casu in §. 165. negotium absolvimus. Simul vero etiam compendia, si factores involvantur, differentiationis exhibuimus. Deinde vero etiam quantitates irrationales cuiusvis generis differentiare docuimus, quae quomodocunque functionem propositam afficiant, sive ei per additionem, sive per subtractionem sive multiplicationem sive divisionem sint implicatae, perpetuo ad casus iam tractatos revocari poterunt. Intelligenda autem haec sunt de functionibus explicitis; nam de implicitis, quarum natura per aequationem datur, infra, postquam functiones duarum pluriumve variabilium differentiare docuerimus, tractandi locus erit.

170. Si regulas hic traditas singulas perpendamus atque inter se conferamus, eas omnes ad unam maxime universalem reducere poterimus; quam autem infra demum rigida demonstratione munire licebit; interim tamen & hoc loco non adeo difficile erit eius veritatem attendenti intueri. Functio quaecunque algebraica composita est ex partibus, quae vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel divisione inter se erunt complicatae; haeque partes erunt vel rationales vel irrationales. Vocemus ergo istas quantitates functionem quamvis constituentes eius partes. *Tum pro qualibet parte functio proposi-*

ta seorsim ita differentietur, quasi ea pars sola esset variabilis, reliquae vero partes omnes constantes. Quo facto singula ista differentialia, quae ex singulis partibus modo descripto eliciuntur, in unam summam colligantur, sicque obtinebitur differentiale functionis propositae. Huiusque regulae ope omnes omnino functiones differentiari poterunt, nequidem transcendentibus exceptis, uti infra ostendetur.

171. Ad regulam hanc illustrandam ponamus functionem y duabus constare partibus, sive per additionem sive subtractionem connexis, ita ut sit $y = p \pm q$. Ponatur primo sola pars p variabilis, altera q constans erit differentiale $= dp$, deinde ponatur altera pars $\pm q$ sola variabilis, altera vero p constans, eritque differentiale $= \pm dq$. Atque ex his differentialibus differentiale quaesitum ita componetur, ut sit $dy = dp \pm dq$, omnino uti idem iam supra invenimus. Hinc vero simul liquet, si functio pluribus constet partibus, sive invicem additis sive subtractis, nempe $y = p \pm q \pm r \pm s$, ope huius regulae inventum iri $dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds$, plane uti & superior regula docebat.

172. Si partes sint in se invicem multiplicatae, ita ut sit $y = pq$, manifestum est posita sola parte p variabili, fore differentiale $= qdp$; at si altera pars q sola variabilis statuatur, erit differentiale $= pdq$. Addantur ergo haec duo differentialia invicem, atque prodibit differentiale quaesitum $dy = qdp + pdq$, quemadmodum ex iam allatis constat. Si plures fuerint partes per multiplicationem connexae, scilicet $y = pqrs$, si successive unaquaeque sola variabilis statuatur, orientur ista differentialia $qrsdp$, $prsdq$, $pqsdr$, & $pqrds$, quorum summa dabit differentiale quaesitum, nempe

$$dy = qrsdp + prsdq + pqsdr + pqrds,$$

prorsus uti iam ante invenimus. Differentiale ergo ex totidem partibus componitur, sive partes functionem constituentes sint invicem additae subtractaeve, sive in se invicem multiplicatae

173. Si partes functionem formantes per divisionem sint connexae, nempe $y = \frac{p}{q}$ ponatur secundum regulam primum sola pars p variabilis, eritque ob q constans differentiale $= \frac{dp}{q}$; deinde ponatur sola pars q variabilis ob $y = pq^{-1}$, erit differentiale $= -\frac{pdq}{qq}$, quae duo differentialia collecta dabunt differentiale functionis propositae

$$dy = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{qq} = \frac{qdp - pdq}{qq},$$

sicut iam supra invenimus. Simili modo si functio proposita sit $y = \frac{pq}{rs}$, ponendo successive singulas partes solas p, q, r & s variabiles, prodibunt sequentia differentialia:

$$\frac{qdp}{rs};\ \frac{pdq}{rs};\ \frac{-pqdr}{rrs};\ \&\ \frac{-pqds}{rss},$$ unde fit

$$dy = \frac{qrsdp + prsdq - pqsdr - pqrds}{rrss}$$

174. Dummodo ergo singulae partes, ex quibus functio componitur, ita fuerint comparatae; ut earum differentialia exhiberi queant, simul quoque totius functionis differentiale inveniri poterit. Quodsi igitur partes fuerint functiones rationales, tum earum differentialia non solum ope praeceptorum ante iam datorum inveniuntur, sed ea quoque ex hac ipsa regula generali erui poterunt: sin autem partes fuerint irrationales, quia irrationalitas ad potestates, quarum exponentes sunt numeri fracti, reducitur, eae per differentiationem potestatum, qua est $d.x^n = nx^{n-1}dx$ differentiabuntur. Atque, ex eodem fonte haurietur quoque differentiatio eiusmodi formularum irrationalium, quae alias insuper expressiones surdas invo-

volvunt. Unde patet ſi cum regula generali hic data, infra vero demonſtranda, coniungatur regula differentiandi poteſtates, tum omnium omnino functionum algebraicarum differentialia exhiberi poſſe.

175. Ex his omnibus iam dilucide ſequitur, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, differentiale eius dy huiuſmodi habiturum eſſe formam $dy = pdx$, in qua valor ipſius p per praecepta hic expoſita ſemper aſſignari queat. Erit autem p functio ipſius x quoque algebraica, cum in eius determinationem nullae aliae operationes ingrediantur, niſi conſuetae, quibus functiones algebraicae conſtitui ſolent. Hancobrem ſi y fuerit functio algebraica ipſius x, erit quoque $\frac{dy}{dx}$ functio algebraica ipſius x. Atque ſi z fuerit etiam functio algebraica ipſius x, ita ut ſit $dz = qdx$, ob q functionem algebraicam ipſius x, erit quoque $\frac{dz}{dy}$ functio algebraica ipſius x, quippe quae eſt $= \frac{q}{p}$ Quare ſi huiuſmodi formulae $\frac{dz}{dy}$ in expreſſionem cetera algebraicam ingrediantur, eae non impedient, quominus ea expreſſio ſit algebraica, dummodo y & z fuerint functiones algebraicae.

176. Poterimus autem hoc ratiocinium extendere ad differentialia ſecunda & ſuperiorum ordinum. Si enim manente y functione algebraica ipſius x, fuerit $dy = pdx$, atque $dp = qdx$; erit ſumto differentiali dx conſtante, $ddy = qdx^2$ uti ſupra vidimus. Cum igitur ob rationes ante allegatas ſit quoque q functio algebraica ipſius x, erit quoque $\frac{ddy}{dx^2}$ non ſolum quantitas finita, ſed etiam functio algebraica ipſius x, dummodo y fuerit eiuſmodi functio. Simili modo perſpicietur, fore $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c. functiones al-

gebraicas ipsius x, modo y fuerit talis; atque si z sit quoque functio algebraica ipsius x, omnes expressiones finitae; quae ex differentialibus cuiusvis ordinis ipsarum y, z, & ex dx componuntur cuiusmodi sunt $\frac{ddy}{ddz}$; $\frac{d^3y}{dzddy}$; $\frac{dxd^4y}{dy^3ddz}$; &c. simul erunt functiones algebraicae ipsius x.

177. Cum igitur nunc methodus sit tradita cuiusque functionis ipsius x algebraicae differentiale primum inveniendi, eadem methodo poterimus quoque differentialia secunda altiorumque ordinum investigare. Si enim y fuerit functio quaecunque algebraica ipsius x, ex eius differentiatione $dy = pdx$ innotescet valor ipsius p. Qui si denuo differentietur atque reperiatur $dp = qdx$, erit $ddy = qdx^2$, posito dx constante, sicque definietur differentiale secundum. Differentiando porro q, ut sit $dq = rdx$, habebitur differentiale tertium $d^3y = rdx^3$; sicque ulterius differentialia altiorum ordinum indagabuntur; quoniam quantitates p, q, r, &c. omnes sunt functiones ipsius x algebraicae, ad quas differentiandas praecepta data sufficiunt. Hoc ergo efficietur continua differentiatione; omissis enim dx, in differentiatione ipsius y, prodibit valor ipsius $\frac{dy}{dx} = p$, qui denuo differentiatus ac divisus per dx, quod fit dum ubique differentiale dx omittatur, dabit valorem ipsius $q = \frac{ddy}{dx^2}$ Simili modo porro invenitur $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ &c.

I. Sit $y = \frac{aa}{aa + xx}$ cuius differentialia tam prima quam sequentium ordinum requiruntur.

Primum ergo differentiando simulque per dx dividendo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{-2aax}{(aa + xx)^2}$, hincque porro

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2a^4 + 6aaxx}{(aa+xx)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^4x - 24aax^3}{(aa+xx)^4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24a^6 - 240a^4xx + 120aax^4}{(aa+xx)^5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-720a^6x + 2400a^4x^3 - 720aax^5}{(aa+xx)^6}$$

&c.

II. Sit $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, eruntque differentialia primum & sequentia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-xx)^{\frac{13}{2}}}$$

&c.

Haec

Haec Differentialia facile ulterius continuantur; interim tamen lex, qua termini eorum progrediuntur, non cito patet. Coefficiens quidem supremarum ipsius x potestatum semper est productum numerorum naturalium ab 1 usque ad ordinem differentialis, quod quaeritur. Interim si has formas ulterius continuemus atque perpendamus, deprehendemus fore generaliter, si $y = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x^n + \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ldots 6}x^{n-6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.\ 2\ldots\ldots 8}x^{n-8} + \&c.\right)$$

Huiusmodi ergo exempla non solum inserviunt ad habitum in differentiationis negotio acquirendum, sed etiam leges, quae in differentialibus omnium ordinum observantur, per se sunt notatu dignissimae, atque ad alias inventiones deducere possunt.



CAPUT VI.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM TRANSCENDENTIUM.

178.

Praeter infinita quantitatum transcendentium seu non algebraicarum genera, quae calculus integralis suppeditabit, in Introductione ad analysin infinitorum ad cognitionem aliquot huiusmodi quantitatum magis usitatarum nobis pervenire licuit, quas doctrina de logarithmis & arcubus circularibus suggesserat. Quoniam igitur harum quantitatum naturam tam dilucide exposuimus, ut fere eadem facilitate atque quantitates algebraicae in calculo tractari queant, earum quoque differentialia in hoc capite investigabimus, quo earum indoles ac proprietates clarius perspiciantur; hocque pacto aditus ad calculum integralem, qui quantitatum transcendentium est fons proprius, pateflat.

179. Primum igitur occurrunt quantitates logarithmicae, seu eiusmodi functiones ipsius x, quae praeter expressiones algebraicas quoque logarithmum ipsius x, seu cuiusvis ipsius functionis involvunt. Ad quas differentiandas, cum quantitates algebraicae nullum negotium amplius facessant, omnis difficultas in inveniendo differentiali logarithmi cuiusque ipsius x functionis erit posita. Quia vero logarithmorum plurima dantur genera diversa, quae tamen inter se constantes tenent rationes, hic logarithmos hyperbolicos potissimum contemplabimur, cum ex iis omnes reliqui logarithmi facile formentur. Si enim functionis p logarithmus hyperbolicus fuerit $= lp$, tum eiusdem functionis p logarithmus ex alio canone desumtus erit $= mlp$, denotante m numerum, quo relatio

huius logarithmorum canonis ad hyperbolicos exprimitur. Hanc ob caufam lp perpetuo hic defignabit logarithmum hyperbolicum quantitatis p.

180. Quaeramus ergo differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis x, ponaturque $y = lx$, ita ut differentialis dy valor definiri debeat. Ponatur $x + dx$ loco x, ficque tranfibit y in $y^I = y + dy$; quare habebitur

$$y + dy = l(x + dx) \text{ \& } dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}).$$

At iam fupra logarithmum hyperbolicum huiufmodi expreffionis $1 + z$ ita per feriem infinitam expreffimus, ut effet

$$l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{\&c.}$$

Pofito ergo $\frac{dx}{x}$ pro z, obtinebimus:

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{\&c.}$$

Cum igitur huius feriei omnes termini prae primo evanefcant, erit $d.\ lx = dy = \frac{dx}{x}$. Unde alius cuiufcunque logarithmi, cuius ad hyperbolicum ratio eft ut $n : 1$, differentiale erit $= \frac{ndx}{x}$.

181. Si igitur cuiufque ipfius x functionis p logarithmus lp proponatur, eodem ratiocinio reperietur eius differentiale effe $= \frac{dp}{p}$, unde ad logarithmorum differentialia invenienda haec habetur regula. *Quantitatis* p, *cuius logarithmus proponitur, fumatur differentiale, hocque per ipfam quantitatem* p *divifum dabit differentiale logarithmi quaefitum.* Se-

quitur haec eadem regula quoque ex forma $\frac{p^{\omega}-1^{\omega}}{0}$, ad quam superiori libro logarithmum ipsius p reduximus. Sit $\omega = 0$, & cum sit

$lp = \frac{p^{\omega}-1}{\omega}$: erit $d.lp = d.\frac{1}{\omega}p^{\omega} = p^{\omega-1}dp = \frac{dp}{p}$ ob $\omega = 0$.

Notandum autem est $\frac{dp}{p}$ esse differentiale logarithmi hyperbolici ipsius p; ita ut, si logarithmus vulgaris ipsius p proponeretur, differentiale illud $\frac{dp}{p}$ multiplicari deberet per hunc numerum 0,43429448 &c.

182. Ope huius ergo regulae, cuiuscunque functionis ipsius x logarithmus proponatur, eius differentiale facillime inveniri poterit, quemadmodum ex sequentibus exemplis perspicietur:

I. Si sit $y = lx$; erit $dy = \frac{dx}{x}$.

II. Si sit $y = lx^n$; ponatur $x^n = p$, ut sit $y = lp$, eritque $dy = \frac{dp}{p}$. At est $dp = nx^{n-1}dx$, unde fit $dy = \frac{ndx}{x}$.

Idem quoque ex logarithmorum natura colligitur; cum enim sit $lx^n = nlx$, erit $d.lx^n = nd.lx = \frac{ndx}{x}$.

III. Si sit $y = l(1+xx)$, erit $dy = \frac{2xdx}{1+xx}$.

IV. Si sit $y = l\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; quia erit $y = -l\sqrt{(1-xx)}$ $= -\frac{1}{2}l(1-xx)$, invenitur $dy = \frac{xdx}{1-xx}$.

V.

V. Si fit $y = l\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$, ob $y = lx - \frac{1}{2}l(1+xx)$, fiet $dy = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}$.

VI. Si fit $y = l(x + \sqrt{(1+xx)})$, fiet

$$dy = \frac{dx + xdx : \sqrt{(1+xx)}}{x + \sqrt{(1+xx)}} = \frac{xdx + dx\sqrt{(1+xx)}}{(x+\sqrt{(1+xx)})\sqrt{(1+xx)}}$$

cuius fractionis cum numerator ac denominator per $x + \sqrt{(1+xx)}$ fit divisibilis fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

VII. Si fit $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(x\sqrt{-1} + \sqrt{(1-xx)})$, ponatur $x\sqrt{-1} = z$. Atque ob $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(z + \sqrt{(1+zz)})$, erit per praecedens $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}} dz : \sqrt{(1+zz)}$.

Quare, ob $dz = dx\sqrt{-1}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Quamvis ergo logarithmus propositus imaginaria involvat, tamen eius differentiale fit reale.

183. Si quantitas, cuius logarithmus proponitur, habeat factores, tum ipse logarithmus in plures alios resolvetur hoc modo: Si proponatur $y = lpqrs$, quia erit $y = lp + lq + lr + ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}$. Haec resolutio pariter locum habet, si illa quantitas, cuius logarithmus differentiari debet, fuerit fractio. Sit enim $y = l\frac{pq}{rs}$, ob $y = lp + lq - lr - ls$, erit $dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}$. Neque etiam potestates difficultatem movebunt, si enim fue-

fuerit $y = l\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$, ob $y = mlp + nlq - \mu lr - \nu ls$, erit $dy = \frac{mdp}{p} + \frac{ndq}{q} - \frac{\mu dr}{r} - \frac{\nu ds}{s}$.

I. Si fuerit $y = l(a+x)(b+x)(c+x)$, quia erit $y = l(a+x) + l(b+x) + l(c+x)$, fiet differentiale quaesitum

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Si fuerit $y = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$, erit $y = \frac{1}{2}l(1+x) - \frac{1}{2}l(1-x)$, hincque $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x} = \frac{dx}{1-xx}$.

III. Si sit $y = \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, ob $y = \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}+x) - \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}-x)$, erit $dy = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$. Hoc idem facilius invenitur, si in fractione $\frac{\sqrt{(1+xx)}+x}{\sqrt{(1+xx)}-x}$, irrationalitas in denominatore tollatur multiplicando numeratorem ac denominatorem per $\sqrt{(1+xx)}+x$, prodibit enim

$$y = \frac{1}{2}l(\sqrt{(1+xx)}+x)^2 = l(\sqrt{(1+xx)}+x),$$

cuius differentiale ante vidimus esse $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}}$.

IV. Si sit $y = l\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}$. Ponatur huius fractionis numerator $\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)} = p$ & denominator $\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)} = q$, erit $y = l\frac{p}{q} = lp - lq$,

& $dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$. Est vero $dp = \frac{du}{2\sqrt{(1+u)}} - \frac{du}{2\sqrt{(1-u)}} = \frac{-du}{2\sqrt{(1-uu)}}(\sqrt{(1+u)} - \sqrt{(1-u)}) = \frac{-qdu}{2\sqrt{(1-uu)}}$; & $dq = \frac{du}{2\sqrt{(1+u)}} + \frac{du}{2\sqrt{(1-u)}} = \frac{pdu}{2\sqrt{(1-uu)}}$. Hinc fiet $\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} = \frac{-qdu}{2p\sqrt{(1-uu)}} - \frac{pdu}{2q\sqrt{(1-uu)}} = \frac{-(pp+qq)du}{2pq\sqrt{(1-uu)}}$. At est $pp + qq = 4$ & $pq = 2u$, unde erit $dy = -\frac{du}{u\sqrt{(1-uu)}}$. Hoc autem differentiale facilius invenietur, si logarithmus propositus ita transformetur,

$$y = l\frac{1+\sqrt{(1-uu)}}{u} = l\left(\frac{1}{u} + \sqrt{\left(\frac{1}{uu} - 1\right)}\right).$$

Posito enim $\frac{1}{u} + \sqrt{\left(\frac{1}{uu} - 1\right)} = p$, erit

$$dp = \frac{-du}{uu} - \frac{du}{u^3\sqrt{\left(\frac{1}{uu} - 1\right)}} = \frac{-du}{uu} - \frac{du}{uu\sqrt{(1-uu)}}$$

$$= \frac{-du(1+\sqrt{(1-uu)})}{uu\sqrt{(1-uu)}},$$ ideoque, ob $p = \frac{1+\sqrt{(1-uu)}}{u}$, erit $dy = \frac{dp}{p} = \frac{-du}{u\sqrt{(1-uu)}}$ ut ante.

184. Cum igitur logarithmorum differentialia prima, si per dx dividantur, sint quantitates algebraicae, differentialia secunda ac sequentium ordinum per praecepta praecedentis capitis facile inveniuntur, si quidem differentiale dx assumatur constans. Sic posito

$y =$

$$y = lx, \quad \text{erit}$$

$$dy = \frac{dx}{x}, \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}, \quad \& \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$d^4y = \frac{-6dx^4}{x^4}, \quad \& \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-6}{x^4}$$

Atque si p fuerit quantitas algebraica, sitque $y = lp$, etiamsi y non sit quantitas algebraica, tamen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; &c. erunt functiones algebraicae ipsius x.

185. Exposita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis ac logarithmis sunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis solis componuntur; uti ex sequentibus exemplis fiet perspicuum.

I. Si sit $y = (lx)^2$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^2$ erit $dy = 2pdp$; verum $dp = \frac{dx}{x}$; ideoque erit $dy = \frac{2dx}{x}\, lx$.

II. Simili modo si sit $y = (lx)^n$, erit $dy = \frac{ndx}{x}(lx)^{n-1}$, unde, si sit $y = \sqrt{lx}$, ob $n = \frac{1}{2}$, erit $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{lx}}$.

III. Atque si p fuerit functio quaecunque ipsius x, ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = \frac{ndp}{p}(lp)^{n-1}$. Quare cum differentiale dp per praecedentia assignari possit, erit quoque differentiale ipsius y cognitum.

IV. Si sit $y = lp \cdot lq$, fuerintque p & q functiones quaecun-

cunque ipsius x, per regulam factorum supra datam erit

$$dy = \frac{dp}{p} lq + \frac{dq}{q} lp.$$

V. Si sit $y = xlx$; erit per eandem regulam $dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx$.

VI. Si sit $y = x^m lx - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione secundum partes instituta, reperietur $d.x^m lx = mx^{m-1} dxlx + x^{m-1} dx$, & $d.\frac{1}{m} x^m = x^{m-1} dx$, unde erit $dy = mx^{m-1} dxlx$.

VII. Si sit $y = x^m (lx)^n$, fiet $dy = mx^{m-1} dx (lx)^n + nx^{m-1} dx (lx)^{n-1}$.

VIII. Si logarithmi logarithmorum occurrant, uti si fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, & $dy = \frac{dp}{p}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$; unde fiet $dy = \frac{dx}{xlx}$.

IX. Atque si fuerit $y = lllx$, si statuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, eritque per exemplum praecedens $dy = \frac{dp}{plp}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$, quibus valoribus substitutis habebitur $dy = \frac{dx}{xlx.llx}$.

186. Exposita logarithmorum differentiatione, progrediamur ad quantitates exponentiales, seu eiusmodi potestates, quarum exponentes sint variabiles. Huiusmodi autem ipsius x functionum differentialia per logarithmorum differentiationem inveniri possunt hoc modo. Quaeratur differentiale ipsius a^x, ad quod investigandum ponatur $y = a^x$, eritque logarithmis sumendis $ly = xla$. Sumantur iam differentialia, atque obti-

nebitur $\frac{dy}{y} = dxla$; unde fit $dy = ydxla$, cum autem fit $y = a^x$, erit $dy = a^x dxla$, quod eſt differentiale ipſius a^x. Simili modo, ſi ſit p functio quaecunque ipſius x, huius quantitatis exponentialis a^p differentiale erit $= a^p dpla$.

187. Hoc idem autem differentiale immediate ex natura quantitatum exponentialium in introductione expoſita deduci poteſt. Sit enim propoſita a^p, denotante p functionem quamcunque ipſius x, quae, poſito $x + dx$ loco x, abeat in $p + dp$. Unde ſi ponatur $y = a^p$, ſi x abeat in $x + dx$, erit $y + dy = a^{p+dp}$, ideoque $dy = a^{p+dp} - a^p = a^p(a^{dp} - 1)$. Oſtendimus autem ſupra, quamvis quantitatem exponentialem a^z, per huiuſmodi ſeriem exprimi $1 + zla + \frac{z^2(la)^2}{2} + \frac{z^3(la)^3}{6} + \&c.$ unde erit $a^{dp} = 1 + dpla + \frac{dp^2(la)^2}{2} + \&c.$, & $a^{dp} - 1 = dpla$, quia ſequentes termini prae $dpla$ omnes evaneſcunt. Conſequenter erit $dy = d.a^p = a^p dpla$. *Quare quantitatis exponentialis* a^p *differentiale erit productum ex ipſa quantitate exponentiali, exponentis differentiali* dp, *& logarithmo quantitatis conſtantis* a, *quae ad exponentem variabilem eſt evecta.*

188. Si igitur e ſit numerus, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, ut ſit $le = 1$, erit quantitatis e^x differentiale $= e^x dx$. Atque ſi dx ſumatur conſtans, erit huius differentiale $= e^x dx^2$, quod eſt differentiale ſecundum ipſius e^x. Simili modo differentiale tertium erit $= e^x dx^3$. Quare ſi ſit

$$y = e^{nx}, \quad \text{erit} \quad \frac{dy}{dx} = ne^{nx}, \quad \& \quad \frac{ddy}{dx^2} = n^2 e^{nx}$$

$$\text{porroque} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = n^3 e^{nx}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n^4 e^{nx}; \quad \&c.$$

Unde patet ipſius e^{nx} differentialia primum, ſecundum & reli-

reliqua sequentia constituere progressionem geometricam: eritque ergo differentiale ordinis m ipsius $e^{nx} = y$, nempe $\frac{d^m y}{dx^m} = n^m e^{nx}$; hincque igitur $\frac{d^m y}{y dx^m}$ quantitas constans n^m.

189. Si ipsa quantitas, quae elevatur, fuerit variabilis, eius differentiale simili modo investigabitur. Sint p & q functiones quaecunque ipsius x, ac proponatur quantitas exponentialis $y = p^q$. Sumtis logarithmis erit $ly = qlp$, quibus differentiatis erit $\frac{dy}{y} = dqlp + \frac{qdp}{p}$, unde fit

$dy = ydqlp + \frac{yqdp}{p} = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$, ob $y = p^q$. Hoc ergo differentiale constat duobus membris, quorum prius $p^q dqlp$ oritur, si quantitas proposita p^q ita differentietur, quasi p esset quantitas constans, solusque exponens q variabilis: alterum vero membrum $qp^{q-1}dp$ oritur, si in quantitate proposita p^q exponens q tanquam constans spectetur, solaque quantitas p, quasi esset variabilis, tractetur. Hocque ergo differentiale per regulam generalem differentiandi supra traditam inveniri potuisset.

190. Eiusdem vero expressionis p^q differentiale quoque ex natura quantitatum exponentialium erui potest hoc modo: sit $y = p^q$, eritque, loco x posito $x + dx$, utique $y + dy = (p + dp)^{q+dq}$, quae expressio, si more solito in seriem resolvatur, fiet

$$y + dy = p^{q+dq} + (q + dq)\, p^{q+dq-1}\, dp$$
$$+ \frac{(q + dq)\,(q + dq - 1)}{1 \cdot 2}\, p^{q+dq-2}\, dp^2 + \&c.$$

ideoque

$$dy = p^{q+dq} - p^q + (q + dq)\, p^{q+dq-1}\, dp,$$

sequentes enim termini, qui altiores ipsius dp potestates involvunt, prae $(q + dq)p^{q+dq-1}dp$ evanescunt. At est

 p^q

$$p^{q+dq}-p^q = p^q(p^{dq}-1) = p^q\left(1+dqlp+\frac{dq^2(lp)^2}{2}+\&c.-1\right)$$
$= p^q dqlp$. In altero vero termino $(q+dq)p^{q+dq-1}dp$ si loco $q+dq$ scribamus q, orietur $qp^{q-1}dp$, ideoque differentiale erit ut ante $dy = p^q dqlp + qp^{q-1}dp$.

191. Facilius vero hoc idem differentiale ex natura quantitatum exponentialium investigabitur, hoc modo: Cum, sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $=1$, sit $p^q = e^{qlp}$, utriusque enim logarithmus est idem qlp; erit $y = e^{qlp}$. Quare, cum nunc quantitas elevata e sit constans, erit $dy = e^{qlp}\left(dqlp + \frac{qdp}{p}\right)$, uti ante ostendimus in regula §. 187. data. Restituatur igitur p^q loco e^{qlp}, fietque
$$dy = p^q dqlp + p^q qdp : p = p^q dqlp + qp^{q-1}dp.$$
Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dxlx + x^x dx$; atque hinc quoque eius ulteriora differentialia definientur: reperietur enim:
$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x} + (1+lx)^2\right)$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^x\left((1+lx)^3 + \frac{3(1+lx)}{x} - \frac{1}{xx}\right)$$
&c.

192. Inter differentialia huiusmodi functionum, quae quantitates exponentiales complectuntur, imprimis sunt notanda sequentia exempla, quae ex differentiatione formulae $e^x p$ originem habent; est autem
$$d.\,e^x p = e^x dp + e^x pdx = e^x(dp + pdx).$$
I. Si sit $y = e^x x^n$; erit $dy = e^x nx^{n-1}dx + e^x x^n dx$
seu $dy = e^x dx(nx^{n-1} + x^n)$

II. Si sit $y = e^x(x-1)$
Erit $dy = e^x xdx$.

III.

III. Si sit $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$

Erit $dy = e^x xxdx$.

IV. Si sit $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

Erit $dy = e^x x^3 dx$.

193. Si ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales, differentiatio secundum eadem praecepta instituetur. Sic si haec quantitas e^{e^x} differentiari debeat, statuatur $e^x = p$, ut sit $y = e^{e^x} = e^p$, erit $dy = e^p dp$; at est $dp = e^x dx$, unde si fuerit

$$y = e^{e^x}; \text{ erit } dy = e^{e^x} e^x dx,$$

atque si sit $y = e^{e^{e^x}}$; erit $dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx$.

Quod si vero fuerit $y = p^{q^r}$, statuatur $q^r = z$, erit $dy = p^z dz lp + z p^{z-1} dp$, at $dz = q^r dr lq + r q^{r-1} dq$, unde $dy = p^z q^r dr lp . lq + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r dp : p$.

Quare si sit:

$$y = p^{q^r}, \text{ erit } dy = p^{q^r} q^r \left(dr lp . lq + \frac{r dq lp}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Hoc ergo modo, quaecunque occurrat quantitas exponentialis, eius differentiale inveniri poterit.

194. Pergamus ergo ad quantitates transcendentes, ad quarum cognitionem consideratio arcuum circularium nos supra deduxit. Sit igitur in circulo, cuius radium constanter ponimus unitati aequalem, propositus arcus, cuius sinus sit

=

$=x$, quem arcum hoc modo exprimamus. A $\sin x$, huiusque arcus differentiale investigemus, seu incrementum quod accipit, si sinus x differentiali suo dx augeatur. Hoc autem ex differentiatione logarithmorum praestari poterit, quia in introductione ostendimus hanc expressionem A $\sin x$ reduci posse ad hanc logarithmicam:

$\frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$. Posito ergo $y = A \sin x$, erit quoque $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})$; quae differentiata dat

$$dy = \frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}}+dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1}} = \frac{dx(x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)})}{(\sqrt{(1-xx)}+x\sqrt{-1})\sqrt{(1-xx)}}$$

unde fit $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

195. Istud arcus circularis differentiale etiam hoc modo facilius sine logarithmorum subsidio inveniri potest. Si enim sit $y = A \sin x$, erit x sinus arcus y, seu $x = \sin y$. Cum igitur, posito $x+dx$ loco x, abeat y in $y+dy$, fiet $x+dx = \sin(y+dy)$. At quia est

$\sin(a+b) = \sin a. \cos b + \cos a. \sin b$, erit

$\sin(y+dy) = \sin y. \cos dy + \cos y. \sin dy$:

arcus autem evanescentis dy sinus ipsi illi arcui dy, eiusque cosinus sinui toti aequatur, hanc ob rem fiet

$\sin(y+dy) = \sin y + dy \cos y$, ideoque $x+dx = \sin y + dy \cos y$. Quia vero est

$\sin y = x$, erit cosinus ipsius y seu $\cos y = \sqrt{(1-xx)}$, quibus valoribus substitutis, erit $dx = dy\sqrt{(1-xx)}$, ex qua obtinebitur $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Ar-

Arcus ergo, cuius sinus proponitur, differentiale aequatur differentiali sinus per cosinum diviso.

196. Cum igitur, si p fuerit functio quaecunque ipsius x, atque y denotet arcum, cuius sinus est $= p$, seu $y = \text{A} \sin p$, sit hujus arcus differentiale $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}}$, ubi $\sqrt{(1 - pp)}$ exprimit cosinum eiusdem arcus, inveniri quoque poterit differentiale arcus, cuius cosinus proponitur. Sit enim $y = \text{A} \cos x$, erit eiusdem arcus sinus $= \sqrt{(1 - xx)}$, ideoque $y = \text{A} \sin \sqrt{(1 - xx)}$. Facto ergo $p = \sqrt{(1 - xx)}$, erit $dp = \frac{-x dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, & $\sqrt{(1 - pp)} = x$; unde fiet $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$. *Arcus ergo, cuius cosinus proponitur, differentiale aequatur differentiali cosinus negative sumto, atque per sinum eiusdem arcus diviso.* Quod etiam hoc modo ostendi potest: si sit $y = \text{A} \cos x$, ponatur $z = \text{A} \sin x$, erit $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ at arcus $y + z$ simul sumti dant arcum constantem 90°, eritque $y + z =$ constans ideoque $dy + dz = 0$, seu $dy = -dz$; unde fit $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, ut ante.

197. Si arcus proponatur differentiandus, cuius tangens detur, ita ut sit $y = \text{A} \operatorname{tang} x$. Arcus autem cuius tangens est x, sinus erit $= \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$, & cosinus $= \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}$. Posito ergo $\frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}} = p$, ut sit $\sqrt{(1 - pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}$, fiet $y = \text{A} \sin p$: unde per regulam modo datam erit $dy = \frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}}$. At, ob $p = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$, erit $dp = \frac{dx}{(1 + xx)^{\frac{3}{2}}}$;

qui-

quibus valoribus substitutis fiet $dy = \frac{dx}{1+xx}$. *Arcus ergo, cuius tangens proponitur, differentiale aequatur differentiali tangentis per quadratum secantis diviso.* Est enim $\sqrt{(1+xx)}$ secans, si x sit tangens.

198. Simili modo si proponatur arcus, cuius cotangens datur, ita ut sit $y = A \cot x$; quia eiusdem arcus tangens est $= \frac{1}{x}$, posito $\frac{1}{x} = p$, erit $y = A \operatorname{tang} p$, ac propterea $dy = \frac{dp}{1+pp}$. Cum nunc sit $dp = \frac{-dx}{xx}$, facta substitutione, erit $dy = \frac{-dx}{1+xx}$, quod est differentiale cotangentis negative sumtum, atque per quadratum cosecantis divisum. Porro si proponatur $y = A \sec x$, quia est $y = A \cos \frac{1}{x}$, fiet $dy = \frac{dx}{xx\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}} = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Atque, si sit $y = A \operatorname{cosec} x$, erit $y = A \sin \frac{1}{x}$, ideoque $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Saepe etiam sinus versus occurrit, ita si proponatur $y = A \operatorname{sv.} x$, quia est $y = A \cos(1-x)$, huiusque arcus sinus est $= \sqrt{(2x-xx)}$, fiet $dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

199. Quamquam ergo arcus, cuius sinus, vel cosinus, vel tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel denique sinus versus datur, est quantitas transcendens, tamen eius differentiale, si per dx dividatur, erit quantitas algebraica, ac propterea quoque eius differentialia secunda, tertia, quarta &c. si per potestates ipsius dx convenientes dividantur.

tur. Ceterum, quo haec differentiatio melius percipiatur, adiunximus sequentia exempla.

I. Si sit $y = A \sin 2x\surd(1-xx)$, ponatur $p = 2x\surd(1-xx)$, ut sit $y = A \sin p$, eritque $dy = \frac{dp}{\surd(1-pp)}$. At est $dp = 2dx\surd(1-xx) - \frac{2xxdx}{\surd(1-xx)} = \frac{2dx(1-2xx)}{\surd(1-xx)}$, & $\surd(1-pp) = 1-2xx$, quibus valoribus substitutis, erit $dy = \frac{2dx}{\surd(1-xx)}$. Quod etiam inde patet, quod $2x\surd(1-xx)$ sit sinus arcus dupli, dum x est sinus simpli, erit ergo $y = 2 A \sin x$, ideoque $dy = \frac{2dx}{\surd(1-xx)}$.

II. Si sit $y = A \sin \frac{1-xx}{1+xx}$; ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$ & $\surd(1-pp) = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{\surd(1-pp)}$, erit $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

III. Si sit $y = A \sin \surd\frac{1-x}{2}$, ponatur $\surd\frac{1-x}{2} = p$, erit $\surd(1-pp) = \surd\frac{1+x}{2}$, & $dp = \frac{-dx}{4\surd\left(\frac{1-x}{2}\right)}$, unde fit $dy = \frac{dp}{\surd(1-pp)} = \frac{-dx}{2\surd(1-xx)}$.

IV. Si sit $y = A \tang \frac{2x}{1-xx}$, facto $p = \frac{2x}{1-xx}$, erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$, & $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$. Quare

S cum

cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$ per regulam tangentium (197), erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

V. Si sit $y = \text{A tang} \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, posito $p = \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x}$, fiet $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx}$, & $1+pp = \frac{2+2xx-2\sqrt{(1+xx)}}{xx} = \frac{2(\sqrt{(1+xx)}-1)\sqrt{(1+xx)}}{xx}$. Atqui $dp = \frac{-dx}{xx\sqrt{(1+xx)}} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(\sqrt{(1+xx)}-1)}{xx\sqrt{(1+xx)}}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, fiet $dy = \frac{dx}{2(1+xx)}$; quod etiam inde intelligitur, quod sit $\text{A tang} \frac{\sqrt{(1+xx)}-1}{x} = \frac{1}{2}\text{A tang}\, x$.

VI. Si sit $y = e^{\text{A sin}\, x}$, haec formula quoque per praecedentia differentiabitur: fiet enim $dy = e^{\text{A sin}\, x} \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Hoc ergo modo omnes functiones ipsius x, in quas praeter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

200. Quoniam differentialia arcuum per dx divisa sunt quantitates algebraicae, eorum differentialia secunda & sequentia per ea, quae de functionum algebraicarum differentiatione exposuimus, invenientur. Sit $y = \text{A sin}\, x$, quia est $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, cuius differentiale dabit valorem pro

ddy

$\frac{ddy}{dx^2}$, si quidem dx sumatur constans: unde differentialia ipsius y cuiusvis ordinis ita se habebunt.

Si sit $y = \text{A sin}\, x$; erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}; \text{ \& sumto } dx \text{ constante}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-xx)^{\frac{11}{2}}}$$

&c.

unde concludimus ut supra §. 177. fore generaliter:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{(1-xx)^{n+\frac{1}{2}}} \text{ in}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}x^{n-6} + \&c.\right)$$

201. Supersunt quantitates, quae ex harum inversione nascuntur, scilicet sinus, tangentesve arcuum datorum, quas quomodo differentiare oporteat, ostendamus. Sit igitur x arcus circuli,

 &

& $\sin x$ denotet eius sinum, cuius differentiale investigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x + dx$ loco x, quia y abit in $y + dy$, erit $y + dy = \sin(x + dx)$, & $dy = \sin(x + dx) - \sin x$. Est autem $\sin(x + dx) = \sin x . \cos dx + \cos x . \sin dx$. atque cum sit, uti in introductione ostendimus

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \&c.$$

erit reiectis terminis evanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, unde fit $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusvis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d . \sin p = dp \cos p$.

202. Similiter si proponatur $\cos x$, seu cosinus arcus x, cuius differentiale investigari oporteat. Ponatur $y = \cos x$, & posito $x + dx$ loco x, fiet $y + dy = \cos(x + dx)$. Est vero $\cos(x + dx) = \cos x . \cos dx - \sin x . \sin dx$, & quia ut modo vidimus est $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, erit $y + dy = \cos x - dx \sin x$, ideoque $dy = - dx \sin x$. *Quare differentiale cosinus cuiusque arcus aequatur differentiali arcus negative sumto per sinum eiusdem arcus multiplicato.* Sic si p fuerit functio quaecunque ipsius x, erit $d . \cos p = - dp \sin p$. Hae differentiationes quoque ex antecedentibus elici possunt hoc modo: si fuerit $y = \sin p$, erit $p = A \sin y$; & $dp = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$; at ob $y = \sin p$, erit $\cos p = \sqrt{(1 - yy)}$, quo valore substituto erit $dp = \frac{dy}{\cos p}$ & $dy = dp \cos p$, ut ante. Pari modo si sit $y = \cos p$, erit $\sqrt{(1 - yy)} = \sin p$, & $p = A \cos y$, ideoque $dp = \frac{-dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{-dy}{\sin p}$, unde fit ut ante $dy = - dp \sin p$.

203. Si fuerit $y = \tang x$, erit $dy = \tang(x + dx) - \tang x$; at est $\tang(x + dx) = \frac{\tang x + \tang dx}{1 - \tang x . \tang dx}$, a qua fractione si tangens x subtrahatur, remanebit $dy = \frac{\tang dx (1 + \tang x . \tang x)}{1 - \tang x . \tang dx}$. Verum arcus evanescentis dx tangens ipsi arcui est aequalis, ideoque $\tang dx = dx$, & denominator $1 - dx \tang x$, abit in unitatem: quocirca fiet $dy = dx(1 + \tang x^2)$. Est vero $1 + \tang x^2 = \sec x^2 = \frac{1}{\cos x^2}$, denotante $\cos x^2$ quadratum cosinus ipsius x: consequenter si fuerit $y = \tang x$, erit $dy = dx \sec x^2 = \frac{dx}{\cos x^2}$. Quod differentiale quoque per differentiationem sinuum & cosinuum inveniri potest; cum enim sit $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$, erit

$$dy = \frac{dx \cos x . \cos x + dx \sin x . \sin x}{\cos x^2} = \frac{dx}{\cos x^2}.$$

ob $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$.

204. Aliter etiam hoc differentiale invenitur. Cum sit $y = \tang x$, erit $x = A \tang y$, & per praecepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1+yy}$. At cum sit $y = \tang x$, erit $\sqrt{(1+yy)} = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, ideoque $dx = dy \cos x^2$, & $dy = \frac{dx}{\cos x^2}$, ut ante. *Tangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus diviso per quadratum cosinus eiusdem arcus.* Simili modo si proponatur $y = \cot x$, fiet $x = A \cot y$, & $dx = \frac{-dy}{1+yy}$. At vero erit

$\sqrt{(1+yy)} = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, unde habebitur $dx = -dy \sin x^2$, & $dy = \frac{-dx}{\sin x^2}$. *Cotangentis ergo cuiusvis arcus differentiale aequatur differentiali arcus negative sumto ac per quadratum sinus eiusdem arcus diviso.* Vel quia est $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, fiet hanc fractionem differentiando:

$$dy = \frac{-dx \sin x^2 - dx \cos x^2}{\sin x^2} = \frac{-dx}{\sin x^2},$$

uti modo invenimus.

205. Si proponatur secans arcus, ut sit $y = \sec x$, quia erit $y = \frac{1}{\cos x}$, erit $dy = \frac{dx \sin x}{\cos x^2} = dx \operatorname{tang} x . \sec x$. Simili modo si fuerit $y = \operatorname{cosec} x$, ob $y = \frac{1}{\sin x}$, erit $dy = \frac{-dx \cos x}{\sin x^2} = -dx \cot x \operatorname{cosec} x$, pro quibus casibus peculiares regulas formare superfluum foret. Si sinus versus arcus proponatur $y = \text{sv}. x$, quia est $y = 1 - \cos x$, erit $dy = dx \sin x$. Omnes ergo casus, quibus linea quaepiam recta ad arcum relata proponitur, quia semper per sinum cosinumve exprimi potest, sine difficultate differentiari poterunt. Neque vero tantum differentialia prima, sed etiam secunda & sequentia per regulas datas invenientur. Ponamus esse $y = \sin x$ & $z = \cos x$, atque dx esse constans: erit ut sequitur:

$y = \sin x$	$z = \cos x$
$dy = dx \cos x$	$dz = -dx \sin x$
$ddy = -dx^2 \sin x$	$ddz = -dx^2 \cos x$
$d^3 y = -dx^3 \cos x$	$d^3 z = dx^3 \sin x$
$d^4 y = dx^4 \sin x$	$d^4 z = dx^4 \cos x$
&c.	&c.

206. Simili modo inveniri poterunt differentialia omnium ordinum tangentis arcus x. Sit enim $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, & ponatur dx constans, erit

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\cos x^4} - \frac{4}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin x}{\cos x^5} - \frac{8 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos x^6} - \frac{120}{\cos x^4} + \frac{16}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \sin x}{\cos x^7} - \frac{480 \sin x}{\cos x^5} + \frac{32 \sin x}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{\cos x^8} - \frac{6720}{\cos x^6} + \frac{2016}{\cos x^4} - \frac{64}{\cos x^2}$$

&c.

207. Functiones ergo quaecunque, in quas sinus vel cosinus arcuum ingrediuntur, per haec praecepta differentiari poterunt, uti ex sequentibus exemplis videre licet.

I. Si sit $y = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$

Erit $dy = 2\,dx \cos x^2 - 2\,dx \sin x^2 = 2\,dx \cos 2x$.

II. Si sit $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$, vel $y = \sin \frac{1}{2} x$

Erit

Erit $dy = \frac{dx \sin x}{2\sqrt{2(1-\cos x)}}$. Cum autem sit $\sqrt{2(1-\cos x)} = 2\sin\frac{1}{2}x$, & $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x$; fiet $dy = \frac{1}{2}dx.\cos\frac{1}{2}x$, uti ex forma $y = \sin\frac{1}{2}x$ immediate sequitur.

III. Si sit $y = \cos l\frac{1}{x}$; erit, posito $l\frac{1}{x} = p$, $y = \cos p$, & $dy = -dp\sin p$. At, ob $p = l1 - lx$, erit $dp = \frac{-dx}{x}$; ideoque $dy = \frac{dx}{x}\sin l\frac{1}{x}$.

IV. Si sit $y = e^{\sin x}$; erit $dy = e^{\sin x}dx\cos x$.

V. Si sit $y = e^{\frac{-n}{\cos x}}$; erit $dy = -\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}}ndx\sin x}{\cos x^2}$.

VI. Si sit $y = l\left(1-\sqrt{(1-e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)$; ponatur $e^{\frac{-n}{\sin x}} = p$; atque ob $y = l(1-\sqrt{(1-p)})$, erit

$$dy = \frac{dp}{2(1-\sqrt{(1-p)})\sqrt{(1-p)}}.\text{ At est } dp = \frac{e^{\frac{-n}{\sin x}}ndx\cos x}{\sin x^2}.$$

Quo valore substituto prodibit

$$dy = \frac{n e^{\frac{-n}{\sin x}}dx\cos x}{2\sin x^2\left(1-\sqrt{(1-e^{\frac{-n}{\sin x}})}\right)\sqrt{(1-e^{\frac{-n}{\sin x}})}}$$

CA-

CAPUT VII.

DE DIFFERENTIATIONE FUNCTIONUM DUAS PLURESVE VARIABILES INVOLVENTIUM.

208.

Si duae pluresve quantitates variabiles x, y, z a se invicem prorsus non pendeant, fieri potest, ut etiamsi omnes sint variabiles, tamen dum una crescit decrescitve, reliquae maneant invariatae: quia enim nullum nexum inter se habere ponuntur, immutatio unius reliquas non afficit. Neque ergo differentialia quantitatum y & z pendebunt a differentiali ipsius x; ideoque dum x differentiali suo dx augetur, quantitates y & z, vel eaedem manere, vel quomodocunque pro lubitu variari possunt. Quodsi igitur differentiale quantitatis x statuatur dx, reliquarum quantitatum differentialia dy & dz manent indeterminata, atque pro arbitrio nostro vel prorsus nihil, vel infinite parva ad dx quamvis rationem tenentia denotabunt.

209. Plerumque autem litterae y & z functiones ipsius x vel incognitas, vel quarum relatio ad x non spectatur, significare solent, hocque casu earum differentialia dy & dz certam ad dx relationem habebunt. Sive autem y & z pendeant ab x sive secus, ratio differentiationis, quam hic spectamus, eodem redit. Quaerimus enim functionis, quae ex pluribus variabilibus $x, y, \& z$ utcunque sit formata, differentiale, quod accipit, dum singulae variabiles $x, y, \& z$ suis differentialibus $dx, dy, \& dz$ crescunt. Ad hoc ergo inveniendum in functione proposita ubique loco variabilium quantitatum x, y, z scribatur respective $x+dx$; $y+dy$; $z+dz$, & ab expressione hoc modo resultante auferatur ipsa functio proposita: residuum dabit ipsum differentiale, quod quaeritur,

quemadmodum ex natura differentialium luculenter constat.

210. Sit X functio ipsius x, eiusque differentiale, seu augmentum, dum x differentiali suo dx crescit, sit $= Pdx$. Deinde sit Y functio ipsius y, eiusque differentiale $= Qdy$, quod augmentum Y accipit, dum y abit in $y + dy$: atque Z sit functio ipsius z, eiusque differentiale sit $= Rdz$, quae differentialia Pdx, Qdy, Rdz ex natura functionum X, Y, & Z ope praeceptorum supra datorum inveniri poterunt. Quod si ergo proposita fuerit haec quantitas $X + Y + Z$, quae utique erit functio trium variabilium x, y, & z, eius differentiale erit $= Pdx + Qdy + Rdz$. Utrum autem haec tria differentialia sint inter se homogenea nec ne perinde est. Termini enim qui continent potestates ipsius dx prae Pdx aeque evanescunt, ac si reliqua membra Qdy & Rdz abessent, similisque est ratio terminorum, qui in differentiatione functionum Y & Z sunt neglecti.

211. Retineant X, Y & Z easdem significationes, sitque proposita ista functio XYZ ipsarum x, y & z, cuius differentiale investigari oporteat. Quoniam, si $x + dx$ loco x, $y + dy$ loco y, & $z + dz$ loco z scribatur, abit X in $X + Pdx$; Y in $Y + Qdy$; & Z in $Z + Rdz$, ipsa functio proposita XYZ abibit in

$$(X + Pdx)(Y + Qdy)(Z + Rdz)$$
$$= XYZ + YZP\,dx + XZQ\,dy + XYR\,dz$$
$$+ ZPQdxdy + YPRdxdz + XQRdydz + PQRdxdydz.$$

At quia dx, dy, & dz sunt infinite parva, sive inter se sint homogenea sive non; ultimus terminus prae unoquoque praecedentium evanescit. Deinde terminus $ZPQdxdy$ tam prae $YZPdx$ quam prae $XZQdy$ evanescit; atque ob eandem rationem termini $YPRdxdz$ & $XQZdydz$ evanescent. Ablata ergo ipsa functione proposita XYZ, erit eius differentiale

$$= YZPdx + XZQdy + XYRdz.$$

212. Exempla haec functionum trium variabilium x, y, & z, quibus pro lubitu quisque plura adiicere potest, sufficiunt

ciunt ad ostendendum, si functio quaecunque trium variabilium x, y, & z proponatur, utcunque etiam hae variabiles inter se fuerint permixtae, eius differentiale semper huiusmodi formam esse habiturum $pdx + qdy + rdz$: ubi p, q, & r futurae sint singulae functiones, vel omnium trium variabilium x, y, & z, vel binarum, vel unius tantum, prout ratio compositionis, qua functio proposita ex variabilibus x, y, & z atque constantibus formatur, fuerit comparata. Simili modo, si proponatur functio quatuor pluriumve variabilium x, y, z, & v, eius differentiale semper huius modi formam habebit

$$pdx + qdy + rdz + sdv.$$

213. Consideremus primum functionem duarum tantum variabilium x & y, quae sit $= V$, cuius ergo differentiale ita se habebit, ut sit $dV = pdx + qdy$. Si igitur quantitas y assumeretur constans, foret $dy = 0$, ideoque functionis V differentiale esset pdx: sin autem x statueretur constans, ut esset $dx = 0$, solaque y maneret variabilis, tum ipsius V differentiale prodiret $= qdy$. Cum igitur utraque quantitate x & y variabili posita sit $dV = pdx + qdy$, ista regula pro differentianda functione V duas variabiles x & y involvente resultabit: *Ponatur primum sola* x *variabilis, altera vero* y *tanquam constans tractetur, & quaeratur ipsius* V *differentiale, quod sit* $= pdx$. *Deinde ponatur sola quantitas* y *variabilis, altera* x *pro constanti habita, & quaeratur ipsius* V *differentiale, quod sit* $= qdy$. *Quibus factis, posita utraque quantitate* x *&* y *variabili, fiet* $dV = pdx + qdy$.

214. Simili modo, cum functionis trium variabilium x, y, & z, quae sit $= V$, differentiale huiusmodi habeat formam $dV = pdx + qdy + rdz$, manifestum est, si sola quantitas x fuisset variabilis posita, reliquae vero y & z constantes mansissent, ob $dy = 0$ & $dz = 0$, prodiisset ipsius V differentiale $= pdx$. Pari modo inveniretur differentiale ipsius $V = qdy$, si x & z essent constantes solaque y poneretur variabilis; atque si x & y tanquam constantes tractarentur sola-

que z ſtatueretur variabilis, prodiret differentiale ipſius $V = rdz$. Quare ad functionem trium pluriumve variabilium differentiandam, conſideretur ſeorſim quaelibet quantitas variabilis, & functio pro qualibet differentietur, quaſi reliquae omnes eſſent conſtantes; tum ſingula haec differentialia, quae ex ſingulis quantitatibus variabilibus ſunt inventa, colligantur, eritque aggregatum differentiale quaeſitum functionis propoſitae.

215. In hac regula, quam pro differentiatione functionis quotcunque variabilium invenimus, continetur demonſtratio regulae ſupra §. 170 datae generalis, cuius ope functio quaecunque unicam variabilem complectens differentiari poteſt. Si enim pro ſingulis partibus ibi commemoratis totidem litterae diverſae collocentur, functio ſpeciem induet functionis totidem diverſarum variabilium, atque adeo modo hic praeſcripto differentiabitur, ſucceſſive unamquamque partem, quaſi ſola eſſet variabilis, tractando, cunctaque differentialia, quae ex ſingulis partibus oriuntur, in unam ſummam coniiciendo: quae ſumma erit differentiale quaeſitum, poſtquam pro ſingulis litteris valores fuerint reſtituti. Haec ergo regula latiſſime patet, atque etiam ad functiones plurium variabilium, quomodocunque fuerint comparatae, extenditur. Unde eius uſus per univerſum calculum differentialem eſt ampliſſimus.

216. Inventa ergo regula generali, cuius ope functiones quotcunque variabilium differentiari poſſunt, eius uſum in nonnullis exemplis oſtendiſſe iuvabit.

I. Si fuerit $V = xy$; erit $dV = xdy + ydx$.

II. Si fuerit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$.

III. Si fuerit $V = \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}}$; erit

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV.

IV. Si fuerit $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$; erit

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n (\alpha dx + \beta dy) + n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}(\delta dx + \varepsilon dy),$$

five $dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1}(\delta + \varepsilon y + \zeta)^{n-1}$ in

$$\left(\begin{matrix} m\alpha\delta \\ n\alpha\delta \end{matrix} xdx \begin{matrix} + m\beta\delta \\ + n\alpha\varepsilon \end{matrix} xdy \begin{matrix} + m\alpha\varepsilon \\ + n\beta\delta \end{matrix} ydx \begin{matrix} + m\beta\varepsilon \\ + n\beta\varepsilon \end{matrix} ydy \begin{matrix} + m\alpha\zeta \\ + n\gamma\delta \end{matrix} dx \begin{matrix} + m\beta\zeta \\ + n\gamma\varepsilon \end{matrix} dy \right).$$

V. Si fuerit $V = ylx$; erit $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$.

VI. Si fuerit $V = x^y$; erit $dV = yx^{y-1}dx + x^y dylx$.

VII. Si fuerit $V = A \tang \frac{y}{x}$; erit $dV = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$.

VIII. Si fuerit $V = \sin x . \cos y$; erit $dV = dx \cos x . \cos y - dy \sin x . \sin y$.

IX. Si fuerit $V = \frac{e^z y}{\sqrt{(xx + yy)}}$; erit

$$dV = \frac{e^z ydz}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{e^z (xxdy - yxdx)}{(xx + yy)\sqrt{(xx + yy)}}.$$

X. Si fuerit $V = e^z A \sin \frac{x - \sqrt{(xx - yy)}}{x + \sqrt{(xx - yy)}}$,

reperietur $dV = e^z dz A \sin \frac{x - \sqrt{(xx - yy)}}{x + \sqrt{(xx - yy)}}$

$$+ e^z . \frac{xydy - yydx}{(x + \sqrt{(xx - yy)})(xx - yy)^{\frac{3}{4}} \sqrt{x}}$$

217. Quoniam vidimus, fi V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x & y, eius differentiale huiusmodi habiturum esse formam $dV = Pdx + Qdy$, in qua fint P & Q functiones a functione V pendentes per eamque determinatae: fequitur has duas quantitates P & Q certo quodam modo

do etiam a ſe invicem pendere, propterea quod utraque ab eadem functione V pendet. Quicunque igitur ſit iſte nexus inter quantitates finitas P & Q, quem deinceps inveſtigabimus, perſpicuum eſt, non omnes formulas differentiales huiuſmodi $Pdx + Qdy$, in quibus P & Q pro lubitu ſint ex x & y formatae, poſſe eſſe differentialia cuiuſpiam functionis finitae V ipſarum x & y. Niſi enim ea relatio inter functiones P & Q intercedat, quam natura differentiationis requirit, huiuſmodi differentiale $Pdx + Qdy$ oriri plane per differentiationem non potuit, ideoque viciſſim integrale non habebit.

218. In integratione igitur plurimum intereſt noſſe hanc relationem inter quantitates P & Q, ut differentialia, quae revera ex differentiatione functionis cuiuſpiam finitae ſunt orta, dignoſci queant ab iis, quae ad libitum ſunt formata, atque nulla integralia admittunt. Quanquam autem hic nondum integrationis negotium ſuſcipimus, tamen ad naturam differentialium realium penitius inſpiciendam conveniet hanc relationem inveſtigari; quippe cuius cognitio non ſolum ad calculum integralem, ad quem hic viam paramus, eſt maxime neceſſaria, ſed etiam in ipſo calculo differentiali inſignem lucem accendit. Primum igitur patet, ſi V ſit functio duarum variabilium x & y, in eius differentiali $Pdx + Qdy$ utriuſque differentiale dx & dy ineſſe oportere. Neque ergo poteſt eſſe $P = 0$ neque $Q = 0$. Hinc ſi P fuerit functio ipſarum x & y, formula Pdx nullius quantitatis finitae poterit eſſe differentiale, ſeu nulla extat quantitas finita, cuius differentiale ſit Pdx.

219. Sic nulla datur quantitas finita V ſive algebraica ſive tranſcendens, cuius differentiale ſit $yxdx$, ſi quidem ſit y quantitas variabilis ab x non pendens. Si enim ponamus dari eiuſmodi quantitatem finitam V, quia y in eius differentiale ingreditur, neceſſe eſt, ut y quoque in ipſa quantitate V inſit; verum ſi V contineret y, ob variabilitatem ipſius y ne-

necessario quoque in differentiali ipsius V differentiale dy inesse deberet. Quod tamen cum non adsit, fieri nequit, ut differentiale $yxdx$ ex cuiuspiam quantitatis finitae differentiatione sit ortum. Cum igitur pateat formulam $Pdx + Qdy$, si Q sit o, & P contineat y, differentiale reale esse non posse, simul intelligitur, quantitati Q non pro lubitu valorem tribui posse, sed eum a valore ipsius P pendere.

220. Quo igitur hanc relationem inter P & Q in differentiali $dV = Pdx + Qdy$ investigemus, ponamus primo V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x & y: a casibus enim particularibus ad relationem generalem ascendamus. Quod si ergo ponamus $y = tx$, ex functione V quantitas x prorsus evanescet, prodibitque functio ipsius t tantum, quae sit $= T$, cuius differentiale erit $= \Theta dt$, existente Θ functione ipsius t. Ponamus igitur quoque in differentiali $Pdx + Qdy$ ubique $y = tx$, & $dy = tdx + xdt$, quo facto prodibit

$$Pdx + Qtdx + Qxdt;$$

in quo cum dx non contineatur, necesse est ut sit

$P + Qt = o$; ideoque $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, seu erit $Px + Qy = o$, unde relatio inter P & Q pro hoc casu innotescit. Deinde debet esse $\Theta = Qx$, ideoque $Qx =$ functioni ipsius t, hoc est functioni nullius dimensionis ipsarum x & y. Atque ob $Q = \frac{\Theta}{x}$ fiet $P = -\frac{\Theta y}{xx}$, & tam Px quam Qy erunt functiones nullius dimensionis ipsarum x & y.

221. Si igitur functio nullius dimensionis ipsarum x & y, quae sit $= V$, differentietur, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$, semper ita erit comparatum, ut sit $Px + Qy = o$. Hoc est si in differentiali loco differentialium dx & dy scribantur x & y, resultabit quantitas $= o$: uti in his exemplis usu venire patet:

L

I. Sit $V = \frac{x}{y}$; erit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy}$, atque posito x loco dx & y loco dy, erit $\frac{yx - xy}{yy} = 0$.

II. Sit $V = \frac{x}{\surd(xx - yy)}$, erit $dV = \frac{-yydx + yxdy}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde fit $\frac{-yyx + yyx}{(xx - yy)^{\frac{3}{2}}} = 0$.

III. Sit $V = \frac{y + \surd(xx + yy)}{-y + \surd(xx + yy)}$, quae est functio nullius dimensionis ipsarum x & y; erit $dV = \frac{2xxdy - 2xydx}{(\surd(xx + yy) - y)^2 \surd(xx + yy)}$, quae forma positis x & y loco dx & dy fit $= 0$.

IV. Sit $V = l\frac{x + y}{x - y}$; erit $dV = \frac{2xdy - 2ydx}{xx - yy}$, atque $\frac{2xy - 2yx}{xx - yy} = 0$.

V. Sit $V = A \sin \frac{\surd(x - y)}{\surd(x + y)}$, erit $dV = \frac{ydx - xdy}{(x + y)\surd 2y(x - y)}$, quae formula eadem proprietate gaudet.

222. Contemplemur nunc alias functiones homogeneas, sitque V functio n dimensionum ipsarum x & y. Quare si ponatur $y = tx$, induet V huiusmodi formam Tx^n, existente T functione ipsius t, sitque

$dT = \Theta dt$, erit $dV = x^n \Theta dt + nTx^{n-1} dx$.

Quodsi ergo statuamus:

$dV = Pdx + Qdy$, ob $dy = tdx + xdt$,

fiet $dV = Pdx + Qtdx + Qxdt$:

quae

quae forma quoniam cum illa congruere debet, erit

$$P + Qt = nTx^{n-1} = \frac{nV}{x}, \text{ ob } V = Tx^n.$$

Hancobrem ob $t = \frac{y}{x}$, fiet $Px + Qy = nV$, quae aequatio relationem inter P & Q ita definit, ut si altera sit cognita, altera facile inveniatur. Quia porro est $Qx = x^n \Theta$, erit Qx, ideoque etiam Qy & Px functio n dimensionum ipsarum x & y.

223. Si ergo in differentiali cuiusvis functionis homogeneae ipsarum x & y, loco dx & dy, ponatur x & y, quantitas oriunda aequabitur ipsi functioni, cuius differentiale proponebatur, per numerum dimensionum multiplicatae.

I. Si sit $V = \surd(xx + yy)$; erit $n = 1$, & ob

$$dV = \frac{xdx + ydy}{\surd(xx + yy)}, \text{ fiet } \frac{xx + yy}{\surd(xx + yy)} = V = \surd(xx + yy).$$

II. Si sit $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$; erit $n = 2$, &

$$dV = \frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y - x)^2},$$

Ponatur x pro dx & y pro dy orietur:

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y - x)^2} = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V.$$

III. Si sit $V = \frac{1}{(yy + xx)^2}$, erit $n = -4$, atque

$dV = -\frac{4ydy + 4xdx}{(yy + xx)^3}$. Quae formula positis x & y loco dx & dy abit in $-\frac{4yy + 4xx}{(yy + xx)^3} = -4V$.

IV. Si sit $V = xxl\frac{y+x}{y-x}$; erit $n = 2$, atque $dV = 2xdxl\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy-xx}$, facta autem memorata substitutione oritur $2xxl\frac{y+x}{y-x} = 2V$.

224. Similis proprietas observabitur, si V fuerit functio homogenea plurium variabilium, sit ergo V functio quantitatum x, y, z, quae coniunctim ubique n dimensiones adimpleant; atque differentiale huiusmodi habebit formam $Pdx + Qdy + Rdz$. Ponatur iam $y = tx$ & $z = sx$, ut sit $dy = tdx + xdt$, & $dz = sdx + xds$, atque functio V induet hanc formam Ux^n, existente U functione binarum variabilium t & s; hinc ergo si statuatur $dU = pdt + qds$, fiet

$$dV = x^n pdt + x^n qds + nUx^{n-1}dx.$$

Prior autem forma dabit

$$dV = Pdx + Qtdx + Qxdt + Rsdx + Rxds:$$

quae cum illa collata praebet

$$P + Qt + Rs = nUx^{n-1} = \frac{nV}{x},$$

unde obtinetur $Px + Qy + Rz = nV$; quae eadem proprietas ad quotcunque plures variabiles extenditur.

225. Si igitur proposita fuerit functio homogenea quotcunque variabilium x, y, z, v, &c. eius differentiale perpetuo hanc habebit proprietatem, ut si loco differentialium dx, dy, dz, dv, &c. scribantur respective quantitates finitae x, y, z, v, &c. prodeat ipsa functio proposita per numerum dimensionum multiplicata. Haecque regula etiam valet, si V fuerit functio homogenea unicae tantum variabilis x: Hoc enim casu erit V potestas ipsius x, puta $V = ax^n$, quae est functio homogenea n dimensionum: nulla scilicet alia

da-

datur functio ipsius x, in qua x ubique n dimensiones constituat praeter potestatem x^n. Cum igitur sit $dV = nax^{n-1}dx$, ponatur x loco dx, atque prodibit nax^n, hoc est nV. Ista ergo functionum homogenearum insignis proprietas diligenter notari meretur, cum in calculo integrali maximam afferat utilitatem.

226. Quo nunc in genere in relationem inter quantitates P & Q, quae differentiale $Pdx + Qdy$ functionis cuiuscunque V duarum variabilium x & y constituunt, inquiramus, ad sequentia attendi oportebit. Sit igitur V functio quaecunque ipsarum x & y; atque ponamus V abire in R, si loco x ponatur $x + dx$; posito autem $y + dy$ loco y abeat V in S: quodsi autem simul $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y scribatur, mutetur V in V^I. Cum itaque R oriatur ex V, posito $x + dx$ loco x, manifestum est si ulterius in R ponatur $y + dy$ loco y, tum prodire V^I; idem enim est, ac si in V statim poneretur $x + dx$ loco x, & $y + dy$ loco y. Simili modo si in S ponatur $x + dx$ loco x, quia S iam orta est ex V posito $y + dy$ loco y, denuo prodibit V^I; uti ex hoc schematismo clarius perspicitur.

Quantitas	abit in	si loco	ponatur.
V	R	x	$x + dx$
V	S	y	$y + dy$
V	V^I	x y	$x + dx$ $y + dy$
R	V^I	y	$y + dy$
S	V^I	x	$x + dx$

227. Si igitur V ita differentietur, ut tantum x tanquam variabilis, y vero tanquam constans tractetur, quia po-

ſito $x+dx$ loco x, functio V abit in R, eius differentiale erit $=R-V$; at ex forma $dV=Pdx+Qdy$, ſequitur idem differentiale fore $=Pdx$, unde erit $R-V=Pdx$. Quod ſi iam loco y ponatur $y+dy$, x vero tanquam conſtans tractetur, quia R abit in V^I & V in S, quantitas $R-V$ abibit in V^I-S; ideoque ipſius $R-V=Pdx$ differentiale, quod oritur ſi ſola y variabilis aſſumatur, erit $V^I-R-S+V$. ſimili modo, cum poſito $y+dy$ loco y, abeat V in S, erit $S-V$ differentiale ipſius V poſita ſola y variabili, eritque propterea $S-V=Qdy$; nunc quia loco x poſito $x+dx$, tranſit S in V^I & V in R, quantitas $S-V$ abibit in V^I-R; atque ipſius $S-V=Qdy$ differentiale, quod oritur ſi ſola x variabilis ſtatuatur, erit $=V^I-R-S+V$, quod prorſus congruit cum differentiali ante invento.

228. Ex hac convenientia deducitur ſequens concluſio: Si functionis V cuiuſcunque binarum variabilium x & y differentiale fuerit $dV=Pdx+Qdy$, tum differentiale ipſius Pdx quod oritur ſi ſola quantitas y tanquam variabilis, x vero tanquam conſtans tractetur, aequale erit differentiali ipſius Qdy, quod oritur ſi ſola quantitas x tanquam variabilis, y vero tanquam conſtans tractetur. Si ſcilicet poſita ſola y variabili fuerit $dP=Zdy$ erit differentiale ipſius Pdx praeſcripto modo ſumtum $=Zdxdy$; atque poſita ſola x variabili erit quoque $dQ=Zdx$; ſic enim differentiale ipſius Qdy praeſcripto modo ſumtum fiet quoque $=Zdxdy$. Hacque ratione intelligitur relatio, quae inter quantitates P & Q intercedit, atque paucis verbis in hoc conſiſtit, ut differentiale ipſius Pdx poſito x conſtante aequale ſit differentiali ipſius Qdy poſito y conſtante.

229. Iſta inſignis proprietas clarius perſpicietur, ſi eam nonnullis exemplis illuſtremus.

I. Sit igitur $V=yx$; erit $dV=ydx+xdy$, ideoque $P=y$ & $Q=x$; unde poſito x conſtante erit $d.Pdx=dxdy$, & poſito y conſtante erit $d.Qdy=dxdy$, ſicque haec duo differentialia inter ſe aequantur.

II. Sit $V = \sqrt{(xx + 2xy)}$; erit $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, ideoque $P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, & $Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$, unde posito x constante erit $d.Pdx = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, & posito y constante erit $d.Qdy = \frac{xydxdy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

III. Sit $V = x \sin Ay + y \sin Ax$; eritque

$dV = dx \sin Ay + xdy \cos y + dy \sin Ax + ydx \cos x$.

Quare erit

$Pdx = dx \sin Ay + ydx \cos x$,

& $Qdy = dy \sin Ax + xdy \cos y$.

Posito ergo x constante erit

$d.Pdx = dxdy \cos y + dxdy \cos x$,

& posito y constante erit

$d.Qdy = dxdy \cos y + dxdy \cos x$.

IV. Sit $V = x^y$; erit $dV = x^y dylx + yx^{y-1} dx$,

atque $Pdx = yx^{y-1} dx$, & $Qdy = x^y dylx$.

Quamobrem posito x constante habebitur

$d.Pdx = x^{y-1} dxdy + yx^{y-1} dxdylx$,

& posito y constante erit

$d.Qdy = yx^{y-1} dxdylx + x^{y-1} dxdy$.

230. Ista proprietas etiam hoc modo enunciari potest, unde eximia omnium functionum, quae duas variabiles involvunt, indoles cognoscetur. Si functio quaecunque V duarum variabilium x & y differentietur posita sola x variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola y variabili, tum post du-

duplicem hanc differentiationem idem prodibit, ac si ordine inverso functio V primum posita sola y variabili differentiaretur, hocque differentiale posita sola x variabili denuo differentiaretur: utroque scilicet casu prodibit eadem expressio huius formae $Zdxdy$. Ratio huius identitatis ex praecedente proprietate manifesto sequitur: si enim V differentietur posita sola x variabili, prodit Pdx; &, si V differentietur posita sola y variabili, prodit Qdy, horum differentialium vero differentialia modo indicato sumta inter se aequalia esse, ante demonstravimus. Ceterum haec indoles immediate sequitur ex ratiocinio (§. 227) allato.

231. Relatio inter P & Q, si $Pdx + Qdy$ fuerit differentiale functionis V sequenti etiam modo indicari potest. Quoniam P & Q sunt functiones ipsarum x & y, differentientur ambae posita utraque x & y variabili:

Si scilicet fuerit $dV = Pdx + Qdy$

fit $dP = pdx + rdy$

& $dQ = qdx + sdy$.

Posito ergo x constante erit

$dP = rdy$, & $d.Pdx = rdxdy$.

Deinde posito y constante erit

$dQ = qdx$, & $d.Qdy = qdxdy$.

Cum igitur haec duo differentialia $rdxdy$ & $qdxdy$ sint inter se aequalia, sequitur fore $q = r$. Functiones ergo P & Q ita invicem connectuntur, ut si ambae differentientur, uti fecimus, quantitates q & r inter se fiant aequales. Brevitatis gratia autem hoc saltem capite quantitates r & q ita commode denotari solent, ut r indicetur per $\left(\frac{dP}{dy}\right)$, qua scriptura designatur P ita differentiari, ut sola y tanquam variabilis tractetur, atque differentiale istud per dy dividatur: sic enim prodibit quantitas finita r. Simili modo significabit $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$

quan-

quantitatem finitam q, quia hac ratione indicatur functionem Q sola x posita variabili differentiari, tumque differentiale per dx dividi debere.

232. Utamur ergo hoc scribendi modo, etiamsi alias ambiguitatem afferre possit, quae tamen hic per clausulas evitatur, ut ambages in describendis differentiandi conditionibus evitemus, sicque breviter relationem inter P & Q ita verbis exprimere poterimus, ut dicamus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. In huiusmodi scilicet fractionibus denominator praeter propriam significationem, qua numerator per eum dividi debet, indicat numeratoris differentiale ita esse capiendum, ut ea sola quantitas cuius differentiale denominatorem constituit, tanquam variabilis spectetur. Hoc enim modo per divisionem differentialia prorsus ex calculo egredientur, istaeque fractiones $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ exhibebunt quantitates finitas, quae in praesenti casu erunt inter se aequales. Hoc itaque modo recepto quantitates quoque p & s ita denotare licebit, ut sit $p = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ & $s = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$, si quidem ut monitum est, differentiatio numeratoris per denominatorem restringatur.

233. Consentit haec proprietas mirifice cum proprietate, quam ante in functionibus homogeneis inesse ostendimus. Sit enim V functio homogenea n dimensionum ipsarum x & y, ponaturque $dV = Pdx + Qdy$, atque demonstravimus fore $nV = Px + Qy$, ideoque

$$Q = \frac{nV}{y} - \frac{Px}{y}. \quad \text{Sit} \quad dP = pdx + rdy;$$

eritque $\left(\frac{dP}{dy}\right) = r$, cui aequale esse $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ita ostendetur. Differentietur Q posita sola x variabili, & quia in hac

hac hypothesi est $dQ = \frac{nPdx}{y} - \frac{Pdx}{y} - \frac{npdx}{y}$, fiet $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y}$, debebitque esse $\frac{(n-1)P}{y} - \frac{px}{y} = r$ seu $(n-1)P = px + ry$. Quae aequalitas inde fit perspicua, quod P sit functio homogenea $n-1$ dimensionum ipsarum x & y, unde eius differentiale $dP = pdx + rdy$, ob proprietatem functionum homogenearum, ita debet esse comparatum, ut sit $(n-1)P = px + ry$.

234. Ista proprietas, quod sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, quam omnibus functionibus duarum variabilium x & y communem esse ostendimus, nobis quoque patefaciet naturam functionum trium pluriumve variabilium. Sit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, ac ponatur $dV = Pdx + Qdy + Rdz$. Quod si igitur in hac differentiatione z tanquam constans tractaretur, foret utique $dV = Pdx + Qdy$; hoc autem casu per antecedentia debet esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Deinde si quantitas y constans assumeretur, foret $dV = Pdx + Rdz$, erit ergo $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Denique posito x constante reperietur $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. In differentiali ergo $Pdx + Qdy + Rdz$ functionis V quantitates P, Q, & R ita a se invicem pendent, ut sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \& \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

235. Sequitur hinc ista functionum, quae tres pluresve va-

variabiles involvunt; proprietas analoga ei, quam supra (230) de functionibus duarum variabilium ostendimus. Si fuerit V functio quaecunque trium variabilium x, y, & z, eaque continuo ter differentietur, ita ut primum una quantitatum, puta x, sola variabilis ponatur, in differentiatione secunda sola y, atque in tertia sola z variabilis assumatur, prodibit expressio huius formae $Zdxdydz$, quae eadem reperietur, quocunque alio ordine quantitates x, y, & z collocentur. Sex igitur diversis modis post triplicem differentiationem ad eandem expressionem $Zdxdydz$ pervenietur, quoniam ordo quantitatum x, y, & z sexies variari potest. Quicunque ergo ordo eligatur, si functio V differentietur posita sola prima variabili, hocque differentiale denuo differentietur posita sola secunda variabili, atque differentiale hoc iterum differentietur posita sola tertia variabili, eadem prodibit expressio, utcunque ordo quantitatum x, y, & z varietur.

236. Quo ratio huius proprietatis clarius perspiciatur, ponamus esse $dV = Pdx + Qdy + Rdz$; deinde etiam quantitates P, Q, & R differentiemus, eruntque earum differentialia per ante demonstrata ita comparata:

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz.$$

Differentietur nunc V posito solo x variabili prodibit Pdx, quod differentiale iterum differentietur posito solo y variabili atque habebitur $sdxdy$; quod si differentietur posito solo z variabili, postquam per $dxdydz$ fuerit divisum, obtinebitur $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Collocentur nunc variabiles hoc ordine y, x, z, atque prima differentiatio dabit Qdy, secunda $sdxdy$, & tertia (facta divisione per $dxdydz$) dabit $\left(\frac{ds}{dz}\right)$ ut ante. Disponantur variabiles hoc ordine z, y, x, ac prima differen-

tiatio dabit Rdz ſecunda $udydz$, tertia vero poſt diviſionem per $dxdydz$ praebet $\left(\frac{du}{dx}\right)$. At cum poſito y conſtante ſit $dQ = sdx + udz$; erit $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, uti pariter eſt demonſtratum.

237. Ponamus eſſe $V = \frac{xxy}{aa - zz}$; hancque functionem toties ter differentiemus, quoties ordo variabilium x, y, z variari poteſt:

	I. DIFFER.	II. DIFFER.	III. DIFFER.
poſito variabili	ſolo x $\frac{2xydx}{aa - zz}$;	ſolo y $\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	ſolo z $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
poſito variabili	ſolo x $\frac{2xydx}{aa - zz}$;	ſolo z $\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$;	ſolo y $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
poſito variabili	ſolo y $\frac{xxdy}{aa - zz}$;	ſolo x $\frac{2xdxdy}{aa - zz}$;	ſolo z $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
poſito variabili	ſolo y $\frac{xxdy}{aa - zz}$;	ſolo z $\frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}$;	ſolo x $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
poſito variabili	ſolo z $\frac{2xxyzdz}{(aa - zz)^2}$;	ſolo x $\frac{4xyzdxdz}{(aa - zz)^2}$,	ſolo y $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$
poſito variabili	ſolo z $\frac{2xxyzdz}{(aa - zz)^2}$;	ſolo y $\frac{2xxzdydz}{(aa - zz)^2}$;	ſolo x $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$.

ex quo exemplo patet, quocunque ordine tres variabiles fuerint

rint assumtae, post triplicem differentiationem semper eandem prodire expressionem $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$.

238. Uti autem post triplicem differentiationem ad eandem expressionem est perventum, ita quoque consensus deprehenditur in differentialibus, quae secunda differentiatio suppeditavit. In iis scilicet expressio quaevis bis occurrit; unde patet, quae formulae iisdem differentialibus sint affectae, easdem quoque inter se esse aequales, atque differentialia tertia ideo esse omnia inter se aequalia, quia iisdem differentialibus $dxdydz$ sunt affecta. Hinc igitur concludimus, si V fuerit functio quotcunque variabilium x, y, z, v, u, &c. eaque successive aliquoties differentietur, ut semper unica tantum quantitas variabilis assumatur; tum quoties ad expressiones perveniatur, quae iisdem differentialibus sint affectae, eas quoque inter se aequales fore. Sic duplici differentiatione orietur huiusmodi expressio $Zdxdy$, dum in altera sola x, in altera sola y assumta est variabilis: perindeque est utra prius, posteriusve sit variabilis assumta. Simili modo sex variis modis per triplicem differentiationem eadem exsurget expressio $Zdxdydz$; atque viginti quatuor variis modis pervenietur post quadruplicem differentiationem ad eandem expressionem huius formae $Zdxdydzdv$, atque ita porro.

239. Veritatem horum Theorematum quilibet adhibita levi attentione ex ante explicatis principiis facile agnoscet, atque propria meditatione facilius intuebitur, quam tantis verborum ambagibus, sine quibus demonstrationes proferri non possent. Quia vero harum proprietatum cognitio maximi est momenti in calculo integrali, Tyrones sunt monendi, ut non solum has proprietates ipsi diligenter meditentur, earumque veritatem scrutentur, sed etiam pluribus exemplis comprobent; quo hoc pacto sibi hanc materiam familiariorem reddant, fructusque inde natos postmodum facilius percipere

 que-

queant. Neque vero solum tyrones, sed etiam ii, qui principiis calculi differentialis iam sunt imbuti, ad hoc sunt cohortandi; quoniam in omnibus fere manuductionibus ad hanc Analyseos partem hoc argumentum penitus praetermitti solet. Plerumque enim Auctores solas differentiationis regulas praescripsisse, earumque usum in Geometria sublimiori ostendisse fuerunt contenti, neque in naturam atque proprietates differentialium inquisiverunt; unde tamen maxima subsidia in calculum integralem redundant. Quam ob causam hoc argumentum fere novum in isto Capite fusius persequi visum est, quo simul via ad integrationes alias difficiliores pararetur, atque negotium postea suscipiendum sublevaretur.

240. Cognitis igitur his proprietatibus, quibus differentialia functionum duas pluresve variabiles involventium gaudent, facile poterimus dignoscere, utrum formula differentialis proposita, in qua occurrunt duae pluresve variabiles, sit orta ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae an secus. Si enim in formula $Pdx + Qdy$ non fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, certo poterimus affirmare, nullam existere functionem ipsarum x & y, cuius differentiale sit $= Pdx + Qdy$: neque ergo infra in calculo integrali huiusmodi formulae integrale indagari potest. Sic cum in $yxdx + xxdy$ requisita conditio non adsit, nulla datur functio, cuius differentiale est $= yxdx + xxdy$. Utrum autem semper, quoties est $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ formula ex differentiatione cuiuspiam functionis sit orta, quaestio est, quae demum ex integrationis principiis solide affirmari poterit.

241. Si in formula differentiali proposita tres pluresve insint variabiles, uti $Pdx + Qdy + Rdz$; tum ea ex differentiatione ortum traxisse omnino nequit, nisi tres istae conditiones in ea locum habeant, ut sit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right);\ \&\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right),$$

Quarum conditionum, si una tantum desit, certo affirmare debemus, nullam extare functionem ipsarum x, y, & z, cuius differentiale sit $Pdx + Qdy + Rdz$; huius modi ergo formularum differentialium nequidem requiri possunt integralia, hincque integrationem prorsus non recipere dicuntur. Facile autem intelligitur in calculo integrali formulas differentiales ante dignosci oportere, utrum integrationis sint capaces, quam investigatio integralis actu suscipiatur.



CA-

CAPUT VIII.

DE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM ULTERIORI DIFFERENTIATIONE.

242.

Si unica variabilis adsit, eiusque differentiale primum constans assumatur, supra iam methodus est tradita differentialia cuiusque gradus inveniendi. Scilicet si functionis cuiusvis differentiale denuo differentietur, oritur eius differentiale secundum, hocque iterum differentiatum dat functionis differentiale tertium, atque ita porro. Haec vero eadem regula locum quoque habet, sive functio plures involvat variabiles sive unicam tantum, cuius differentiale primum non ponitur constans. Sit igitur V functio quaecunque ipsius x, neque vero dx sit constans, sed utcunque variabile, ita ut ipsius dx differentiale sit $= ddx$, huiusque differentiale $= d^3x$, & ita porro, atque investigemus differentialia secundum & sequentia functionis V.

243. Ponamus differentiale primum functionis V esse $= Pdx$, ubi erit P functio quaepiam ipsius x pendens ab V. Si iam functionis V differentiale secundum invenire velimus, eius differentiale primum Pdx denuo differentiari oportet; quod cum sit productum ex duabus quantitatibus variabilibus P & dx, quarum illius differentiale sit $dP = pdx$, huius vero dx differentiale ddx, per regulam de factoribus datam erit differentiale secundum $ddV = Pddx + pdx^2$. Deinde si ponatur $dp = qdx$, cum differentiale ipsius dx^2 sit $2dxddx$, erit iterum differentiando

$$d^3V = Pd^3x + dPddx + 2pdxddx + dpdx^2,$$

iam ob $dP = pdx$ & $dp = qdx$; erit

$$d^3V = Pd^3x + 3pdxddx + qdx^3,$$

similique modo ulteriora differentialia invenientur.

244. Applicemus haec ad poteſtates ipſius x, quarum ſingula differentialia inveſtigemus, ſi dx non ponatur conſtans:

I. Sit igitur $V = x$; erit $dV = dx$; $d^2V = d^2x$;
$$d^3V = d^3x; \quad d^4V = d^4x;$$
&c.

II. Sit $V = x^2$; erit $dV = 2xdx$; &
$$ddV = 2xddx + 2dx^2$$
$$d^3V = 2xd^3x + 6dxddx$$
$$d^4V = 2xd^4x + 8dxd^3x + 6ddx^2$$
$$d^5V = 2xd^5x + 10dxd^4x + 20ddxd^3x$$
&c.

III. Si in genere fuerit $V = x^n$; erit
$$dV = nx^{n-1}dx$$
$$ddV = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$$
$$d^3V = nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)x^{n-2}dxddx + n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$
$$d^4V = nx^{n-1}d^4x + 4n(n-1)x^{n-2}dxd^3x + 3n(n-1)x^{n-2}ddx^2 + 6n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^2ddx + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$
&c.

Si igitur fuerit dx conſtans, ac propterea
$$ddx = 0, \quad d^3x = 0, \quad d^4x = 0, \quad \&c.$$
orientur eadem differentialia, quae iam ſupra pro hac hypotheſi ſunt inventa.

245. Quoniam igitur differentialia cuiuſque ordinis ipſius x eadem lege differentiantur, qua quantitates finitae, expreſſiones quaecunque, in quibus praeter quantitatem finitam eius differentialia occurrunt, ſecundum praecepta ſupra data differentiari poterunt. Quam operationem, cum nonnunquam occurrat, hic aliquot exemplis illuſtrabimus.

I.

I. Si fuerit $V = \frac{x\,ddx}{dx^2}$, differentiando prodibit

$$dV = \frac{x\,d^3x}{dx^2} + \frac{ddx}{dx} - \frac{2x\,ddx^2}{dx^3}.$$

II. Si fuerit $V = \frac{x}{dx}$; erit $dV = 1 - \frac{x\,ddx}{dx^2}$, ubi nihil impedit, quod pro V quantitatem infinite magnam posuimus.

III. Si fuerit $V = xx\,l\frac{ddx}{dx^2}$, quia transmutatur

$$V \text{ in } xx\,l\,ddx - 2xx\,l\,dx;$$

erit secundum regulas consuetas differentiando:

$$dV = 2x\,dx\,l\,ddx + \frac{xx\,d^3x}{ddx} - 4x\,dx\,l\,dx - \frac{2xx\,ddx}{dx}.$$

Simili autem modo differentialia altiora ipsius V reperientur.

246. Si expressio proposita duas variabiles involvat, nempe x & y, vel unius differentiale ponitur constans vel neutrius; arbitrarium enim est alterutrius differentiale constans assumi, quia ab arbitrio nostro pendet, quemadmodum unius valores successivos crescere statuere velimus. Neque vero utriusque variabilis differentialia simul statui possunt constantia, hoc ipso enim relatio inter variabiles x & y assumeretur, quae tamen vel nulla est, vel incognita ponitur. Si enim, dum x aequabiliter crescere ponimus, y quoque aequalia incrementa capere statueretur, tum eo ipso indicaretur fore $y = ax + b$; sicque y ab x penderet, quod tamen assumere non licet. Hancobrem vel unius tantum variabilis differentiale constans assumi potest vel nullum. Quodsi autem differentiationes absolvere noverimus nullo differentiali assumto constante, simul quoque differentialia constabunt, si alterutrum differentiale ponatur constans: tantum enim opus est, ut si

dx constans statuatur; ubique termini continentes ddx, d^3x, d^4x, &c. deleantur.

247. Denotet ergo V functionem quamcunque finitam ipsarum x & y, sitque $dV = Pdx + Qdy$. Ad differentiale ipsius V secundum inveniendum assumamus utrumque differentiale dx & dy variabile, & cum P & Q sint functiones ipsarum x & y statuamus:

$$dP = pdx + rdy$$
$$dQ = rdx + qdy$$

supra enim vidimus esse $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = r$.

His positis differentietur $dV = Pdx + Qdy$, & reperietur:

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2.$$

Si igitur differentiale dx statuatur constans, erit

$$ddV = pdx^2 + 2rdxdy + Qddy + qdy^2,$$

sin autem differentiale dy statueretur constans, foret

$$ddV = Pddx + pdx^2 + 2rdxdy + qdy^2.$$

248. Si igitur functio quaecunque ipsarum x & y bis differentietur, nullo differentiali posito constante, eius differentiale secundum semper huiusmodi formam habebit:

$$ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdxdy$$

pendebunt autem quantitates P, Q, R, S, & T ita a se invicem, ut sit signandi modo Capite praecedente adhibito:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \ R = \left(\frac{dP}{dx}\right); \ S = \left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

$$\& \quad T = 2\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

quarum conditionum si vel unica desit, certo affirmare poterimus, formulam propositam nullius functionis esse differentiale secundum. Statim ergo dignosci poterit, utrum huiusmodi formula sit cuiuspiam quantitatis differentiale secundum an minus.

249. Simili modo differentialia tertia ac sequentia invenientur, quod in exemplo particulari ostendisse expediet, quam formulas generales adhibendo.

Sit igitur $V = xy$;

Erit $dV = ydx + xdy$

$ddV = yddx + 2dxdy + xddy$

$d^3V = yd^3x + 3dyddx + 3dxddy + xd^3y$

$d^4V = yd^4x + 4dyd^3x + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y$

&c.

in quo exemplo coefficientes numerici legem potestatum binomii sequuntur, indeque quousque libuerit continuari possunt.

At si fuerit $V = \frac{y}{x}$;

Erit $dV = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx}$

$$ddV = \frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{xx} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3dxddy}{xx} + \frac{6dx^2dy}{x^3} - \frac{3dyddx}{x^2} + \frac{6ydxddx}{x^3} - \frac{6ydx^3}{x^4} - \frac{yd^3x}{x^2}$$

in quo exemplo progressio differentialium non tam facile patet quam in praecedente.

250. Neque vero tantum haec differentiandi methodus ad functiones finitas adstringitur, sed etiam eodem negotio cuiusvis expressionis, quae iam differentialia in se continet, differentiale inveniri potest, sive unum quoddam differentiale assumitur constans sive minus. Cum enim singula differentialia aeque & eadem lege differentientur ac quantitates finitae, regulae in praecedentibus capitibus traditae, etiam hic valent atque observari debent. Denotet igitur V eam expressionem, quam

quam differentiari oportet, ſive ſit finita, ſive infinite magna ſive infinite parva; atque ratio differentiationis ex his exemplis perſpicietur:

I. Sit $V = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;

Erit $dV = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

II. Sit $V = \frac{ydx}{dy}$;

Erit $dV = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}$.

III. Sit $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$;

Erit $dV = \frac{(3dxddx + 3dyddy)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dxddy - dyddx}$

$- \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}(dxd^3y - dyd^3x)}{(dxddy - dyddx)^2}$.

quae differentialia cum ſint generaliſſime ſumta, nullo differentiali pro conſtante habito, hinc facile ea differentialia derivari poterunt, quae oriuntur, ſi vel dx vel dy ſtatuatur conſtans.

251. Quia nullo differentiali conſtante aſſumto, nulla etiam lex, ſecundum quam ſucceſſivi variabilium valores progrediantur, praeſcribitur, differentialia ſecunda & ſequentium ordinum non erunt determinata, neque quicquam certi ſignificabunt. Hinc formula, in qua differentialia ſecunda atque altiora continentur, nullum determinatum habebit valorem, niſi quodpiam differentiale conſtans ſit aſſumtum; ſed eius ſignificatio erit vaga, atque variabitur, prouti aliud atque aliud differentiale fuerit conſtans poſitum. Interim tamen dantur quo-

que eiusmodi expressiones differentialia secunda continentes, quae, etiamsi nullum differentiale positum sit constans, tamen significatum determinatum complectuntur, qui perpetuo idem maneat, quodcunque differentiale constans statuatur. Huiusmodi autem formularum naturam infra diligentius scrutabimur, modumque trademus eas ab aliis, quae valores determinatos non includunt, dignoscendi.

252. Quo haec ratio formularum, in quibus differentialia secunda vel altiora insunt, facilius perspiciatur, contemplemur primum formulas unicam variabilem continentes, atque facile patet, si in quapiam formula insit eius variabilis x differentiale secundum ddx, nullumque differentiale constans statuatur, formulam nullum valorem fixum habere posse. Si enim statuatur differentiale ipsius x constans, fiet $ddx = 0$; sin autem ipsius xx differentiale $2xdx$ seu xdx constans ponatur, cum ipsius xdx differentiale $xddx + dx^2$ sit $= 0$, fiet $ddx = -\frac{dx^2}{x}$. Verum si potestatis cuiuscunque x^n differentiale $nx^{n-1}dx$ seu $x^{n-1}dx$ debeat esse constans; erit eius differentiale secundum $x^{n-1}ddx + (n-1)x^{n-2}dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$. Alii valores pro ddx prodibunt, si aliarum ipsius x functionum differentialia constantia ponantur. Manifestum autem est, formulam, in qua ddx occurrat, diversissimos induere valores, prout loco ddx scribatur vel 0 vel $-\frac{dx^2}{x}$ vel $-\frac{(n-1)dx^2}{x}$ vel alia huiusmodi expressio. Scilicet si proponatur formula $\frac{xxddx}{dx^2}$, quae ob ddx & dx^2 infinite parva homogenea, finitum valorem habere deberet; ea posito dx constante abit in 0, si sit dx^2 constans, ea abit in $-x$; si sit dx^3 constans, ea abit in $-2x$; si dx^4 sit constans, ea abit in $-3x$ & ita por-

porro. Neque ergo determinatum valorem habere poteſt, niſi definiatur, cuiuſmodi differentiale conſtans ſit aſſumtum.

253. Iſta inconſtantia ſignificationis ſimili ratione oſtenditur, ſi differentiale tertium in quapiam formula inſit. Conſideremus hanc formulam $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$, quae pariter finitum valorem prae ſe fert. Si differentiale dx ſit conſtans, abit ea in $\frac{0}{0}$, cuius valor mox patebit. Sit dx^2 conſtans, erit

$$ddx = -\frac{dx^2}{x}; \text{ \& denuo differentiando}$$

$$d^3x = -\frac{2dxddx}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2}, \text{ ob } ddx = -\frac{dx^2}{x},$$

hoc ergo caſu formula propoſita $\frac{x^3 d^3 x}{dx ddx}$ abit in $-3x^2$. At ſi fuerit dx^n conſtans, erit $ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$,

hincque

$$d^3x = -\frac{2(n-1)dxddx}{x} + \frac{(n-1)dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2 dx^3}{xx}$$
$$+ \frac{(n-1)dx^3}{xx} = \frac{(2n-1)(n-1)dx^3}{xx}$$

Hoc ergo caſu erit

$$\frac{d^3x}{ddx} = -\frac{(2n-1)dx}{x}, \text{ \& } \frac{x^3 d^3 x}{dx ddx} = -(2n-1)x^2,$$

unde patet ſi ſit $n = 1$, ſeu dx conſtans, valorem formulae fore $= -x^2$. Ex quo manifeſtum eſt, ſi in quapiam formula differentialia tertia vel altiora occurrant, neque ſimul indicetur, cuiuſmodi differentiale aſſumtum ſit conſtans, eam formulam nullum certum valorem habere, atque adeo nihil

pror-

prorſus ſignificare; quamobrem tales expreſſiones in calculo occurrere non poſſunt.

254. Simili modo ſi formula contineat duas pluresve variabiles, in eaque occurrant differentialia ſecundi altiorisve gradus, intelligetur valorem determinatum locum habere non poſſe, niſi differentiale quodpiam conſtans ſtatuatur, iis tantum exceptis caſibus, quos mox perpendemus. Quum primum enim ddx in quapiam formula ineſt, quoniam pro variis differentialibus, quae conſtantia ponuntur, valor ipſius ddx perpetuo variatur, fieri nequit, ut formula ſtatum obtineat valorem; hocque idem valet de quovis differentiali altiori ipſius x, atque etiam de differentialibus reliquarum variabilium ſecundis & altioribus. Sin autem duarum pluriumve variabilium differentialia ſecunda inſint, fieri poteſt, ut inconſtantia ab uno oriunda per inconſtantiam reliquarum deſtruatur; hincque naſcitur ille caſus, cuius meminimus, quo formula huiuſmodi differentialia ſecunda duarum pluriumve variabilium involvens valorem definitum habere poteſt, non obſtante quod nullum differentiale conſtans ſit poſitum.

255. Haec igitur formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, ſtatam atque fixam ſignificationem habere nequit, niſi quodpiam differentiale primum conſtans ſtatuatur. Nam ſi dx conſtans ponatur habebitur $\frac{xddy}{dxdy}$; ſin autem dy conſtans ponatur, habebitur $\frac{yddx}{dxdy}$; manifeſtum autem eſt has formulas non neceſſario inter ſe eſſe aequales. Si enim neceſſario eſſent aequales, tales manere deberent, quaecunque functio ipſius x loco y ſubſtitueretur. Ponamus tantum eſſe $y = xx$, & cum poſito dx conſtante, ſit $ddy = 2dx^2$, formula $\frac{xddy}{dxdy}$ abibit

in

in 1, sin autem dy seu $2xdx$ ponatur constans, fiet $ddy = 2xddx + 2dx^2 = 0$, ideoque $ddx = -\frac{dx^2}{x}$, unde formula $\frac{yddx}{dxdy}$ abit in $-\frac{1}{2}$. Cum igitur in unico casu reperiatur discrepantia, multo minus in genere erit $\frac{xddy}{dxdy}$ posito dx constante aequalis $\frac{yddx}{dxdy}$ posito dy constante. Deinde quia formula $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$ sibi non constat, dummodo vel dx vel dy constans ponatur, multo minus sibi constabit, si functionis cuiusvis vel ipsius x vel ipsius y vel utriusque differentiale constans ponatur.

256. Hinc apparet huiusmodi formulam statum valorem habere non posse, nisi ita sit comparata, ut postquam loco variabilium y, & z, quae praeter x insunt, functiones quaecunque ipsius x fuerint substitutae, differentialia secunda & altiora ipsius x, nempe ddx, d^3x, &c. penitus ex calculo excedant. Si enim post talem substitutionem quamcunque in formula adhuc relinqueretur ddx, vel d^3x, vel d^4x, &c. quia haec differentialia, prout alia aliaque constantia assumuntur, significationem suam variant, valor quoque ipsius formulae erit vagus. Sic comparata est formula ante proposita $\frac{yddx + xddy}{dxdy}$, quae si statum haberet valorem, quicquid y significet, statum quoque habere deberet valorem, si y denotaret funtionem quampiam ipsius x. At si tantum ponamus $y = x$, formula abit in $\frac{2xddx}{dx^2}$ quae utique ob ddx in ea contentum est vaga, atque alios aliosque valores induit, prouti alia

atque

atque alia differentialia constantia ponuntur, uti ex §. 252 satis est manifestum.

257. Dubium autem hic subnascetur, utrum dentur tales formulae duo plurave differentialia secundi altiorisve gradus continentia, quae hac proprietate gaudeant, ut si loco reliquarum variabilium quaecunque functiones unius substituantur, differentialia secundi gradus prorsus se destruant. Huic dubio primum ita occurramus, ut huiusmodi formulam proponamus, quae ista proprietate sit praedita, quo per explorationem vis quaestionis melius percipiatur. Dico igitur hanc formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ memoratam proprietatem possidere: quaecunque enim functio ipsius x loco y substituatur, semper differentialia secundi gradus penitus evanescent; quam proprietatem sequentibus exemplis comprobemus.

I. Sit $y = x^2$; erit $dy = 2xdx$, & $ddy = 2xddx + 2dx^2$, qui valores in formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ substituti dabunt,

$$\frac{2xdxddx - 2xdxddx - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Sit $y = x^n$; erit $dy = nx^{n-1}dx$,
& $ddy = nx^{n-1}ddx + n(n-1)x^{n-2}dx^2$

qui valores substituti formulam $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ transmutabunt in hanc

$$\frac{nx^{n-1}dxddx - nx^{n-1}dxddx - n(n-1)x^{n-2}dx^3}{dx^3}$$
$$= -n(n-1)x^{n-2}.$$

III. Sit $y = -\sqrt{(1-xx)}$; erit $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$,
&

& $$ddy = \frac{xddx}{\surd(1-xx)} + \frac{dx^2}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

atque formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, abit in

$$\frac{xddx}{dx^2\surd(1-xx)} - \frac{xddx}{dx^2\surd(1-xx)} - \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}},$$

In his igitur omnibus exemplis differentialia secunda ddx se mutuo tollunt, hocque ita eveniet, quaecunque aliae functiones loco y substituantur.

258. Cum ista exempla iam probaverint veritatem nostrae propositionis, quod formula $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ fixum habeat valorem, etiamsi nullum differentiale constans sit assumtum, demonstrationem eo facilius adornare poterimus. Sit y functio quaecunque ipsius x, eiusque differentiale dy huiusmodi erit, ut sit $dy = pdx$, atque p erit functio quaepiam ipsius x, eiusque differentiale propterea huiusmodi formam habebit $dp = qdx$, eritque q iterum functio ipsius x. Cum igitur sit $dy = pdx$, erit differentiando $ddy = pddx + qdx^2$, & $dyddx - dxddy = pdxddx - pdxddx - qdx^3 = -qdx^3$; in qua expressione cum nullum insit differentiale secundum, habebit ea valorem fixum, atque $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ erit $= -q$. Quomodocunque igitur y pendeat ab x, differentialia secunda in hac formula semper se mutuo tollent, hancque ob causam eius valor, qui alioquin esset vagus, fiet status ac fixus.

259. Quanquam hic posuimus y esse functionem ipsius x, tamen veritas aeque subsistit, si y ab x prorsus non pendeat, uti assumsimus. Dum enim pro y functionem quamcunque substituimus, neque qualis sit determinavimus, nullam pendentiam ab x ipsi y tribuimus. Interim tamen sine fun-

ctionis mentione demonstratio formari potest; quaecunque enim y sit quantitas sive pendens ab x sive non pendens, eius differentiale dy homogeneum erit cum dx, sicque $\frac{dy}{dx}$ quantitatem finitam denotabit, cuius differentiale, quod capit, dum x in $x+dx$ & y in $y+dy$ abit, erit fixum, neque a differentialium secundorum lege pendebit. Sit igitur $\frac{dy}{dx}=p$;

erit $dy=pdx$, & $ddy=pddx+dpdx$, unde fit
$$dxddy-dyddx=dpdx^2,$$

cuius valor non est vagus, quia tantum differentialia prima continet; ac propterea idem manet, sive quodpiam differentiale constans accipiatur, qualecunque id demum sit, sive nullum differentiale positum sit constans.

260. Quia igitur $dyddx-dxddy$ non obstantibus differentialibus secundis, quae potentia se mutuo destruere censeri possunt, significationem habet fixam; expressio quaecunque, in qua nulla alia differentialia secunda praeter formulam $dyddx-dxddy$ insunt, pariter significationem habebit fixam. Seu si ponatur $dyddx-dxddy=\omega$, atque V fuerit quantitas ex x, y, earum differentialibus primis dx, dy atque ex ω utcunque composita, ea valorem habebit fixum. Cum enim in differentialibus primis dx & dy nulla ratio habeatur eius legis arbitrariae, qua valores successivi ipsius x crescere ponuntur, in ω differentialia secunda se mutuo tollunt, etiam ipsa quantitas V non erit vaga sed fixa. Sic ista expressio $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy-dyddx}$ valorem obtinet fixum, quamvis ea differentialibus secundis inquinata videatur, atque insuper, quia numerator est homogeneus denominatori, valorem obtinet finitum, nisi is casu vel infinitae magnus vel infinitae parvus evadat.

261. Quemadmodum formula $dxddy - dyddx$ valorem fixum habere ostensa est, ita quoque si tertia variabilis z accedat; hae formulae $dxddz - dzddx$ & $dyddz - dzddy$ valores fixos habebunt. Hinc expressiones, quas tres variabiles x, y, & z involvunt, si in eis nulla alia differentialia secunda occurrant, praeter haec assignata, tum perinde erunt fixae, ac si nulla plane differentialia secunda inessent. Ita haec expressio:

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx + dz)ddy - (dy + dz)ddx + (dx - dy)ddz}$$

non obstantibus differentialibus secundis, fixa gaudet significatione. Similique modo formulae exhiberi possunt, plures variabiles continentes, in quibus differentialia secunda non impediunt, quominus earum significatio sit fixa.

262. Exceptis ergo huius generis formulis, quae differentialia secunda complectuntur, reliquae omnes significationes habebunt vagas, neque propterea in calculo locum habere possunt, nisi quodpiam differentiale primum definiatur, quod constans sit assumtum. Statim vero atque differentiale quodpiam primum constans assumitur, omnes expressiones quotcunque variabiles contineant, & cuiuscunque ordinis differentialia post primum in eas ingrediuntur, fixas obtinebunt significationes, neque amplius ex calculo excluduntur. Si enim verbi gratia dx assumtum sit constans, ipsius x differentialia secunda & sequentia evanescunt; & quaecunque functiones ipsius x loco reliquarum variabilium y, z, &c. substituantur, earum differentialia secunda per dx^2, tertia per dx^3, &c. determinabuntur, sicque inconstantia a differentialibus secundis oriunda tollitur. Idem evenit, si alius variabilis seu functionis cuiuscunque differentiale primum constans ponatur.

263. Ex his igitur sequitur differentialia secunda & altiorum ordinum revera nunquam in calculum ingredi, atque ob vagam significationem prorsus ad Analysin esse inepta.

Quando enim differentialia ſecunda adeſſe videntur, vel differentiale quodpiam primum conſtans aſſumitur, vel nullum. Priori caſu differentialia ſecunda prorſus ex calculo evaneſcunt, dum per differentialia prima determinantur. Poſteriori caſu autem niſi ſe mutuo deſtruant, ſignificatio erit vaga, & propterea in Analyſi locum nullum inveniunt; ſin autem ſe mutuo deſtruunt, tantum apparenter adſunt, & revera ſolae quantitates finitae cum ſuis differentialibus primis adeſſe cenſendae ſunt. Quoniam tamen ſaepiſſime apparenter tantum in calculo uſurpantur, neceſſe fuit, ut methodus eas tractandi exponeretur. Modum autem mox oſtendemus, cuius ope differentialia ſecunda & altiora ſemper exterminari queant.

264. Si expreſſio unicam contineat variabilem x, eiuſque differentialia altiora ddx, d^3x, d^4x, &c. in ea occurrant, ea ſignificatum fixum habere nequit, niſi quodpiam differentiale primum conſtans ſit poſitum. Sit igitur t illa quantitas variabilis, cuius differentiale dt ſit conſtans poſitum, ita ut ſit $ddt=0$, $d^3t=0$, $d^4t=0$, &c. Ponatur $dx=pdt$; eritque p quantitas finita, cuius differentiale vaga ſignificatione differentialium ſecundorum non afficietur, hincque etiam $\frac{dp}{dt}$ erit quantitas finita. Sit $dp=qdt$, ſimilique modo ulterius $dq=rdt$; $dr=sdt$; &c. erunt q, r, s, &c. quantitates finitae fixos ſignificatus habentes. Cum igitur ſit $dx=pdt$; erit

$$ddx=dpdt=qdt^2;\ d^3x=dqdt^2=rdt^3;$$
$$d^4x=drdt^3=sdt^4;\ \&c.$$

qui valores ſi loco ddx, d^3x, d^4x, &c. ſubſtituantur, tota expreſſio meras quantitates finitas cum differentiali primo dt continebit, ideoque non amplius vagam ſignificationem habebit.

265. Si x ſit functio ipſius t, poterit hoc modo quantitas x prorſus eliminari, ita ut ſola quantitas t cum ſuo differentiali dt in expreſſione remaneat: ſin autem t ſit fun-

ctio ipsius x, vicissim quoque x erit ipsius t functio. Interim tamen ipsa quantitas x cum suo differentiali primo dx, in calculo retineri potest, dummodo post substitutiones ante factas ubique loco t & dt earum valores per x & dx expressi restituantur. Quod quo planius fiat, ponamus t esse $= x^n$, ita ut differentiale primum ipsius x^n constans sit positum. Quia igitur est

$$dt = nx^{n-1}dx\,; \quad \text{erit} \quad p = \frac{1}{nx^{n-1}}\,; \qquad \&$$

$$dp = \frac{-(n-1)dx}{nx^n} = qdt = nqx^{n-1}dx\,;$$

$$\text{unde fit} \qquad q = \frac{-(n-1)}{nnx^{2n-1}}\,; \qquad \&$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}} = rdt = nrx^{n-1}dx\,.$$

Hinc porro fit

$$r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}\,; \;\; \& \;\; s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}\,.$$

Quare si differentiale ipsius x^n ponatur constans, erit:

$$ddx = -\frac{(n-1)dx^2}{x}$$

$$d^3x = \frac{(n-1)(2n-1)dx^3}{xx}$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx^4}{x^3}$$

&c.

266. Si expressio duas contineat variabiles x & y, earumque unius x differentiale positum sit constans, ob $ddx = 0$, alia differentialia secunda & altiora non inerunt, praeter ddy, d^3y, &c. Haec autem eodem modo, quo ante usi sumus, tolli poterunt ponendo

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \&c.$$

fiet enim $ddy = qdx^2;\ d^3y = rdx^3;\ d^4y = sdx^4$ &c.
quibus ſubſtitutis expreſſio orietur, quae praeter quantitates finitas $x, y, p, q, r, s,$ &c. nonniſi differentiale primum dx continebit. Sic ſi propoſita fuerit haec expreſſio

$$\frac{ydx^4 + xdyd^3y + xd^4y}{(xx + yy)\,ddy}$$

in qua dx eſt conſtans aſſumtum; ponatur

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \&\ dr = sdx;$$

quibus valoribus ſubſtitutis expreſſio propoſita tranſmutabitur in hanc: $\frac{(y + xpr + xs)\,dx^2}{(xx + yy)\,q}$ quae nulla amplius differentialia ſecunda altiorave continet.

267. Simili modo differentialia ſecunda & altiora tollentur, ſi dy fuerit conſtans aſſumtum. Verum ſi aliud differentiale primum quodcunque dt ſtatuatur conſtans, tum primum modo ante indicato differentialia ipſius x altiora ex calculo tollantur, ponendo

$$dx = pdt;\ dp = qdt;\ dq = rdt;\ dr = sdt;\ \&c.$$

unde fit

$$ddx = qdt^2;\ d^3x = rdt^3;\ d^4x = sdt^4;\ \&c.$$

Deinde ſimili modo differentialia altiora ipſius y ponendo

$$dy = Pdt;\ dP = Qdt;\ dQ = Rdt;\ dR = Sdt;\ \&c.$$

unde fiet

$$ddy = Qdt^2;\ d^3y = Rdt^3;\ d^4y = Sdt^4;\ \&c.$$

quibus ſubſtitutis obtinebitur expreſſio, quae praeter quantitates finitas, $x, p, q, r, s,$ &c. $y, P, Q, R, S,$ &c. ſolum differentiale dt complectetur, neque propterea vagam habebit ſignificationem.

268. Si differentiale primum, quod conſtans ponitur, vel ab x vel ab y vel ab utroque ſimul pendet, tum non

opus

opus eſt, ut duplex quantitatum finitarum p, q, r, &c. ſeries introducatur. Si enim dt ab x tantum pendet, tum litterae p, q, r, &c. fient functiones ipſius x, ſolaeque litterae P, Q, R, &c. ingrediuntur; idemque evenit, ſi differentiale conſtans dt ab y tantum pendeat. At ſi dt ab utraque pendeat, operatio aliquantum immutari debet. Ponamus exempli gratia hoc differentiale ydx conſtans eſſe aſſumtum, eritque $yddx + dxdy = 0$; unde fit $ddx = -\frac{dxdy}{y}$. Sit nunc $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ &c. eritque $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$; ulteriuſque differentiando

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y},$$

ſubſtituatur hic loco ddx eius valor $-\frac{pdx^2}{y}$; fiet

$$d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}; \text{ porroque}$$

$$d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pqdx^4}{yy} + \frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right)3dx^2ddx;$$

& pro ddx ſubſtituto valore $-\frac{pdx^2}{y}$ emerget

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10pq}{yy} - \frac{15p^3}{y^3}\right)dx^4 \text{ &c.}$$

Deinde cum ſit $dy = pdx$; erit

ddy

$$ddy = qdx^2 + pddx = \left(q - \frac{pp}{y}\right) dx^2;$$

& continuo pro ddx valore $-\frac{pdx^2}{y}$ substituendo fiet

$$d^3y = \left(r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}\right) dx^3, \quad \&$$

$$d^4y = \left(s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{yy} - \frac{15p^4}{y^3}\right) dx^4 \quad \&c.$$

qui valores loco differentialium altiorum ipsarum x & y substituti mutabunt expressionem propositam in eiusmodi formam, quae nulla amplius differentialia altiora continebit, hincque consideratione cuiuspiam differentialis constantis exuetur. Facta enim hac transformatione, quia differentialia secunda non insunt, nequidem opus est, ut quale differentiale sumtum sit constans, commemoretur.

269. Saepissime autem in calculo ad lineas curvas applicato evenire solet, ut hoc differentiale primum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ constans assumatur: quare quemadmodum hoc casu differentialia secunda & altiora eliminari debeant, ostendamus. Sic enim simul via patebit ad idem negotium absolvendum, si aliud quodcunque differentiale assumendum sit constans. Ponatur iterum $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; $dr = sdx$; &c. atque differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ induet hanc formam $dx\sqrt{(1 + pp)}$, quae cum sit constans fiet

$$ddx\sqrt{(1+pp)} + \frac{pqdx^2}{\sqrt{(1+pp)}} = 0,$$

ideoque $$ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp};$$

unde iam ipsius ddx valor habebitur: hinc porro erit

d^3x

$$d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$
$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$
$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

Deinde fiet

$$d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2} - \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Quia autem assumsimus $dy = pdx$, fiet differentiando

$$ddy = qdx^2 + pddx = qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp},$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{2pqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp}, \quad \text{ideoque}$$

$$d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4pqqdx^3}{(1+pp)^2};$$

porroque differentiando:

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqrdx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3}.$$

Omnia ergo differentialia altiora utriusque variabilis x & y per quantitates finitas & potestates ipsius dx exprimentur, atque post has substitutiones factas resultabit expressio a differentialibus secundis prorsus libera.

270. Exposito igitur modo differentialia secunda & altiora exuendi, conveniet hoc negotium aliquot exemplis illustrari.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx positum

 est

eſt conſtans. Poſito ergo $dy = pdx$, & $dp = qdx$, ob $ddy = qdx^2$, expreſſio propoſita abit in hanc finitam xq.

II. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, in qua poſitum ſit dy conſtans. Ponatur $dx = pdy$; $dp = qdy$, ob $ddx = qdy^2$, orietur $\frac{1+pp}{q}$. Sin autem ut ante ſtatuere velimus $dy = pdx$, $dp = qdx$; ob dy conſtans erit $0 = pddx + dpdx$ & $ddx = -\frac{qdx^2}{p}$; unde expreſſio propoſita tranſibit in $\frac{-p(1+pp)}{q}$.

III. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$ in qua ydx poſitum ſit conſtans. Ponatur $dy = pdx$ & $dp = qdx$, eritque ex §. 268: $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$, quibus ſubſtitutis expreſſio propoſita transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Sit propoſita iſta expreſſio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua conſtans ſit poſitum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ponatur iterum $dy = pdx$, $dp = qdx$, & ex paragrapho praecedente erit $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$; unde expreſſio propoſita abibit in $\frac{(1+pp)^2}{q}$.

Ex

Ex his autem exemplis ſatis intelligitur, quemadmodum in quovis caſu oblato, quodcunque differentiale primum aſſumtum ſit conſtans, differentialia ſecunda atque altiora eliminari debeant.

271. Cum igitur hoc modo introducendis quantitatibus finitis p, q, r, s, &c. differentialia ſecunda & altiora ita eliminari queant, ut tota expreſſio praeter quantitates finitas x, y, p, q, r, s, &c. ſolum differentiale dx complectatur; viciſſim ſi huiuſmodi expreſſio reducta proponatur, ea iterum in formam priorem tranſmutari poterit loco litterarum p, q, r, s, &c. introducendis differentialibus ſecundis & altioribus. Nunc autem perinde erit, quodnam differentiale primum conſtans aſſumatur; atque vel id ipſum, quod ante fuit aſſumtum conſtans poni poteſt, vel aliud quodcunque. Quin etiam prorſus nullum differentiale conſtans aſſumi poterit, hocque modo prodibunt expreſſiones differentialia ſecunda altiorave continentes, quae etiamſi nullum differentiale conſtans ſit aſſumtum, tamen fixas ſignificationes obtineant, cuiuſmodi expreſſiones dari ſupra oſtendimus.

272. Sit ergo propoſita expreſſio quaecunque continens litteras finitas x, y, p, q, r, &c. una cum differentiali dx, in qua ſit $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; &c. Si enim has litteras p, q, r, &c. ita eliminare velimus, ut earum loco introducamus differentialia ſecunda & altiora ipſarum x & y, nullo differentiali conſtante aſſumto; fiet

$$dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}, \text{ hincque } q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3},$$

quae formula differentiata dabit

$$dq = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4},$$

unde fit $r = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$

Quod

Quod si insuper littera s, quae denotat valorem $\frac{dr}{dx}$, insit, pro ea substitui debebit hic valor $s =$

$$\frac{dx^3 d^4y - 6dx^2 ddx d^3y - 4dx^2 ddy d^3x + 15 dx ddx^2 ddy + 10 dx dy ddx d^3x - 15 dy ddx^3 - dx^2 dy d^4x}{dx^7}$$

His igitur valoribus loco quantitatum p, q, r, s &c. substitutis expressio proposita transmutabitur in aliam differentialia altiora ipsarum x & y continentem, quae etiamsi nullum differentiale primum constans sit assumtum, tamen non vagam sed fixam habebit significationem.

273. Hoc ergo modo quaevis formula differentialis altioris gradus, in qua quodpiam differentiale primum assumtum est constans, transmutari poterit in aliam formam, in qua nullum differentiale constans ponitur, quae hoc non obstante eundem valorem fixum habeat. Primum scilicet ope methodi ante traditae assumtis valoribus

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \&c.$$

differentialia altiora eliminentur, tum loco p, q, r, s, &c. valores nunc inventi substituantur, atque orietur expressio priori aequalis nullum differentiale constans involvens: quam transformationem exempla sequentia illustrabunt.

I. Sit proposita haec expressio $\frac{xddy}{dx^2}$, in qua dx positum constans, quae transmutari debeat in aliam formam nullum differentiale constans involventem. Ponatur $dy = pdx$; $dp = qdx$; atque ut ante (270) vidimus expressio proposita transibit in hanc: qx. Nunc loco q substituatur valor, quem obtinet nullo differentiali constanti assumto $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$ atque reperietur haec expressio $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$ propositae aequalis, & nullum amplius differentiale constans involvens.

II.

II. Sit propofita haec expreffio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$; in qua dy affumtum eft conftans. Ponatur $dy = pdx$ & $dp = qdx$; eaque tranfibit in hanc: $-\frac{p(1+pp)}{q}$, ftatuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$ & $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, atque invenietur: $\frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dyddx - dxddy}$ quae nullo differentiali affumto conftante eundem fixum habet valorem, quem propofita.

III. Sit propofita haec expreffio: $\frac{yddx - xddy}{dxdy}$, in qua differentiale ydx conftans eft affumtum. Ponatur $dy = pdx$, atque uti fupra (270) vidimus haec expreffio transmutatur in hanc: $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$, quae nullo differentiali conftante affumto transformabitur in iftam:

$$-1 - \frac{xdxddy - xdyddx}{dx^2 dy} + \frac{xdy}{ydx}$$

$$= \frac{xdxdy^2 - ydx^2 dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2 dy}.$$

IV. Sit propofita haec expreffio $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, in qua conftans affumtum eft differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Pofito $dy = pdx$, & $dp = qdx$, orietur haec expreffio $\frac{(1+pp)^2}{q}$, (loco citato). Statuatur nunc $p = \frac{dy}{dx}$, & $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, atque nullo affumto differentiali con-

ftan-

ſtante nanciſcemur iſtam expreſſionem $\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy - dxdyddx}$ propoſitae aequivalentem.

V. Sit propoſita haec expreſſio $\frac{dxd^3y}{xddy}$, in qua differentiale dx conſtans ſit aſſumtum. Ponatur

$$dy = pdx;\quad dp = qdx \quad \& \quad dq = rdx;$$

atque ob

$$ddy = qdx^2 \quad \& \quad d^3y = rdx^3$$

formula propoſita abibit in hanc $\frac{rdx^2}{xq}$. Nunc loco q & r ſubſtituantur valores, quos nullo differentiali conſtante aſſumto recipiunt ſcilicet: $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, &

$$r = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$$

atque obtinebitur ſequens expreſſio propoſitae aequivalens:

$$\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{x(dxddy - dyddx)}$$

$$= \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x)}{x(dxddy - dyddx)} - \frac{3ddx}{x}.$$

274. Si has transformationes diligentius intueamur, methodum eas perficiendi colligere poterimus expeditiorem, ita ut non opus ſit litteras p, q, r, &c. introducere. Varii autem modi hoc opus abſolvendi occurrent, prout aliud atque aliud differentiale in formula propoſita conſtans fuerit aſſumtum. Ponamus primum in formula propoſita differentiale dx conſtans eſſe aſſumtum; & quia loco dy poſuimus pdx, rurſuſque $\frac{dy}{dx}$ loco p: differentialia prima dx & dy,

ubi-

ubicunque in expressione occurrunt, sine alteratione relinquuntur. Ubi autem occurrit ddy, quia eius loco scribitur qdx^2, & porro loco q valor $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, transmutatio absolvetur, si ubique loco ddy statim ponatur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$ seu $ddy - \frac{dyddx}{dx}$. Si insuper in expressione proposita occurrat d^3y, quia eius loco ponitur rdx^3, ob valorem ipsius r ante inventum, ubique loco d^3y scribi debebit

$$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx},$$

quo facto expressio proposita transmutabitur in aliam, quae nullum differentiale constans involvit. Sic si proponatur ista expressio $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx positum est constans, ei aequalis erit posito $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ loco ddy, haec nullum differentiale constans involvens: $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy - dyddx}$.

275. Hinc facile colligitur, si in expressione quapiam proposita assumtum fuerit differentiale dy constans, tum ubique loco ddx scribi debere $ddx - \frac{dxddy}{dy}$, & loco d^3x hoc $d^3x - \frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$; ut obtineatur expressio aequivalens, in qua nullum differentiale constans ponatur. Sin autem in expressione proposita constans fuerit assumtum ydx, quoniam fit $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, &

ddy

$ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$; loco ddx ubique ſcribi debebit $-\frac{dxdy}{y}$, & loco ddy ubique $ddy - \frac{dyddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$: ad altiora differentialia, quia in hoc negotio rariſſime occurrere ſolent, non progredior. Quod ſi vero in expreſſione propoſita hoc differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ aſſumtum fuerit conſtans, quia invenimus $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ & $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$: pro ddx ubique ſcribi debet $\frac{dy^2 ddx - dxdyddy}{dx^2 + dy^2}$ & loco ddy ubique $\frac{dx^2 ddy - dxdyddx}{dx^2 + dy^2}$. Sic ſi propoſita fuerit expreſſio $\frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$, in qua $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ aſſumtum ſit conſtans, ea tranſmutabitur in hanc: $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dyddx - dxddy}$, in qua nullum differentiale conſtans aſſumitur.

276. Quo iſtae reductiones facilius ad uſum accommodari queant, eas in ſequenti tabella complecti viſum eſt.

Formula igitur differentialis altioris gradus in aliam nullum differentiale conſtans involventem tranſmutabitur ope ſubſtitutionum ſequentium:

I. Si differentiale dx fuerit conſtans aſſumtum

loco	ſcribatur
ddy	$ddy - \frac{dyddx}{dx}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$

II.

II. Si differentiale dy fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$ddx - \frac{dx\,ddy}{dy}$
d^3x	$d^3x - \frac{3ddx\,ddy}{dy} + \frac{3dx\,ddy^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$

III. Si differentiale ydx fuerit constans assumtum

loco	scribatur
ddx	$-\frac{dx\,dy}{y}$
ddy	$ddy - \frac{dy\,ddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$
d^3x	$\frac{dy\,ddx}{y} - \frac{dx\,ddy}{y} + \frac{3dx\,dy^2}{yy}$
d^3y	$d^3y - \frac{3ddx\,ddy}{dx} + \frac{3dy\,ddx^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx} - \frac{4dy\,ddy}{y} + \frac{4dy^2\,ddx}{y\,dx} + \frac{3dy^3}{yy}.$

IV. Si differentiale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ fuerit constans assumtum.

loco	scribatur
ddx	$\frac{dy^2\,ddx - dx\,dy\,ddy}{dx^2 + dy^2}$
ddy	$\frac{dx^2\,ddy - dx\,dy\,ddx}{dx^2 + dy^2}$
d^3x	$\frac{dy^2\,d^3x - dx\,dy\,d^3y}{dx^2 + dy^2} + \frac{(dx\,ddy - dy\,ddx)(3dy^2\,ddy - dx^2\,ddy + 4dx\,dy\,ddx)}{(dx^2 + dy^2)^2}$
d^3y	$\frac{dx^2\,d^3y - dx\,dy\,d^3x}{dx^2 + dy^2} + \frac{(dy\,ddx - dx\,ddy)(3dx^2\,ddx - dy^2\,ddx + 4dx\,dy\,ddy)}{(dx^2 + dy^2)^2}$

277. Expressiones ergo istae, quae nullum differentiale constans includunt, ita erunt comparatae, ut pro lubitu quodvis differentiale constans assumi queat. Hincque expressiones differentiales altiorum graduum, in quibus nullum differentiale constans assumtum perhibetur, examinari possunt, utrum significatio earum sit vaga an fixa. Ponatur enim pro lubitu quodpiam differentiale puta dx constans, tum per regulam §. praeced. priorem reducatur expressio iterum ad formam, in qua nullum differentiale constans sit assumtum, quae si cum proposita conveniat, ea erit fixa, neque ab inconstantia differentialium secundorum pendebit: sin autem expressio prodeat diversa, tum proposita vagam habet significationem. Sic si ponatur haec expressio $yddx - xddy$, in qua nullum differentiale positum sit constans; ad investigandum, utrum significationem fixam habeat an vagam, ponatur dx constans, eaque abibit in $-xddy$; nunc per regulam primam §. praeced. loco ddy ponatur, $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ ac prodibit $-xddy + \frac{xdyddx}{dx}$, cuius a proposita discrepantia indicat, propositam expressionem fixam statamque significationem non habere.

278. Simili modo si proponatur expressio generalis huiusmodi $Pddx + Qdxdy + Rddy$, conditio definiri poterit, sub qua ea nullo differentiali constante assumto valorem fixum habeat. Ponatur enim dx constans, atque expressio proposita abibit in hanc $Qdxdy + Rddy$: nunc haec iterum transformetur in aliam formam, ut eius significatus idem maneat, etiamsi nullum differentiale constans fingatur, sicque prodibit $Qdxdy + Rddy - \frac{Rdyddx}{dx}$, quae forma cum proposita congruet, si fuerit $Pdx + Rdy = 0$; hocque solo casu valor eius erit fixus. Verum si non fuerit $P = -\frac{Rdy}{dx}$ seu $R = -\frac{Pdx}{dy}$ tum expressio proposita $Pddx + Qdxdy + Rddy$ valorem fixum

xum non habebit, sed eius significatio erit vaga atque diversa, prout aliud atque aliud differentiale constans assumitur.

279. Ex his principiis etiam facile erit expressionem differentialem, in qua quodpiam differentiale constans est positum, transmutare in aliam formam, in qua aliud differentiale constans assumatur. Reducatur enim primum ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans involvat, quo facto illud alterum differentiale constans ponatur. Sic si in expressione proposita differentiale dx assumtum sit constans, eaque transmutanda sit in aliam, quae differentiale dy constans implicet: in formulis supra loco ddy & d^3y substituendis ob dy constans ponatur $ddy = 0$, $d^3y = 0$, atque quaesito satisfiet, si loco ddy substituatur $-\frac{dyddx}{dx}$ & $\frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyddx}{dx}$ loco d^3y. Hoc modo ista formula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx positum est constans, transmutabitur in hanc $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$, in qua dy ponitur constans.

280. Si contra formula, in qua dy constans est positum, transmutari debeat in aliam, in qua dx sit constans, tum loco ddx substitui debet $-\frac{dxddy}{dy}$ & loco d^3x haec expressio $\frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dxd^3y}{dy}$. Simili modo si formula, in qua $\surd(dx^2+dy^2)$ positum est constans, transmutari debeat in aliam, in qua dx sit constans, tum loco ddx scribatur $-\frac{dxdyddy}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{dx^2ddy}{dx^2+dy^2}$ loco ddy. At si formula, qua dx constans est assumtum, transmu-

mutari debeat in aliam, in qua $\surd(dx^2 + dy^2)$ sit constans, quia ob $dx^2 + dy^2$ constans fit $dxddx + dyddy = 0$, & $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, hoc valore loco ddx assumto, pro ddy scribi debebit $ddy + \frac{dy^2 ddy}{dx^2} = \frac{(dx^2 + dy^2)ddy}{dx^2}$. Sic haec formula $-\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$, in qua dx est constans, transmutabitur in aliam, in qua $\surd(dx^2 + dy^2)$ ponitur constans, quae erit $-\frac{dx\surd(dx^2 + dy^2)}{ddy}$.



CAPUT IX.

DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS

281.

In hoc Capite imprimis est propositum earum functionum ipsius x, quae non explicite, sed implicite per aequationem, qua relatio functionis istius y ad x continetur, definiuntur, differentiationem explicare: quo facto naturam aequationum differentialium in genere perpendemus, & quemadmodum ex aequationibus finitis oriantur, ostendemus. Cum enim in calculo integrali summum negotium consistat in integratione aequationum differentialium, seu in inventione eiusmodi aequationum finitarum, qua cum differentialibus conveniant; necesse est, ut hoc loco indolem ac proprietates aequationum differentialium, quae ex earum origine sequuntur, diligentius scrutemur, sicque viam ad calculum integralem praeparemus.

282. Ut igitur hoc negotium absolvamus, sit y functio eiusmodi ipsius x, quae per hanc aequationem quadratam $yy + Py + Q = 0$ definiatur. Cum ergo haec expressio $yy + Py + Q$ sit $= 0$, quicquid x significet, nihilo quoque aequalis erit, si loco x scribatur $x + dx$, quo casu y abit in $y + dy$. Facta autem hac substitutione, si a quantitate resultante subtrahatur prior $yy + Py + Q$, remanebit eius differentiale, quod propterea quoque erit $= 0$. Hinc patet si expressio quaecunque fuerit $= 0$, eius etiam differentiale fore aequale 0; atque si duae quaecunque expressiones inter se fuerint aequales earum quoque differentialia fore aequalia. Cum igitur sit

$yy + Py + Q = 0$, erit quoque

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$$

quia

quia vero P & Q ſunt functiones ipſius x, earum differentialia huiuſmodi formam hebebunt,

$$dP = pdx, \ \& \ dQ = qdx;$$

unde fiet

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$$

ex qua oritur $$\frac{dy}{dx} = \frac{-yp-q}{2y+P}.$$

283. Quemadmodum ergo aequatio finita $yy + Py + Q = 0$ exponit relationem inter y & x, ita aequatio differentialis exprimit relationem ſeu rationem, quam dy tenet ad dx. Quoniam vero eſt $\frac{dy}{dx} = \frac{-yp-q}{2y+P}$, haec ratio $dy : dx$ cognoſci non poteſt, niſi ipſa functio y ſit cognita: neque vero res aliter ſe habere poteſt; cum enim ex aequatione finita y geminum obtineat valorem, uterque ſuum peculiare habebit differentiale, & utriuſque differentiale reperietur, prouti hic vel ille valor in expreſſione $\frac{-yp-q}{2y+P}$ loco y ſubſtituatur. Simili modo functio y per aequationem cubicam definiatur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit triplex; triplici ſcilicet ipſius y valori reſpondens. Si in aequatione propoſita finita y quatuor pluresve habeat dimenſiones, neceſſe eſt ut $\frac{dy}{dx}$ totidem ſignificationes ſortiatur.

284. Interim tamen ipſa functio y ex aequatione eliminari poterit, cum duae habeantur aequationes y continentes, finita ſcilicet & differentialis: tum autem eius differentiale dy ad totidem dimenſiones aſſurget, quot ante habuerat y, ſicque iſta aequatio omnes diverſas rationes ipſius dy ad dx ſimul complectetur. Sumamus praecedens exemplum aequationis $yy + Py + Q = 0$; cuius differentialis eſt:

2y-

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0,$$

ex qua fit $y = \frac{-Pdy - dQ}{2dy + dP}$ qui valor loco y in priori aequatione substitutus dabit:

$$(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0,$$

cuius radices sunt:

$$dy = -\tfrac{1}{2}dP \pm \frac{(\frac{1}{2}PdP - dQ)}{\sqrt{(PP - 4Q)}}$$

quae sunt bina differentialia binorum ipsius y valorum ex aequatione finita: $y = -\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{(PP - 4Q)}$.

285. Invento valore ipsius dy per repetitam differentiationem reperietur valor ipsius ddy, porroque ipsorum d^3y, d^4y, &c. qui autem, cum determinati non sint, nisi aliquod differentiale primum constans statuatur; ponamus commoditatis ergo dx constans, atque ad hoc ostendendum sumamus hoc exemplum $y^3 + x^3 = 3axy$, unde per differentiationem oritur $3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$, hincque $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$, sumantur denuo differentialia posito dx constante atque invenietur

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{-ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - ax)^2}$$

substituatur loco dy eius valor modo inventus $\frac{aydx - xxdx}{yy - ax}$, atque divisione per dx facta habebitur

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{(ay - xx)(2xxy - ayy - aax)}{(yy - ax)^3} + \frac{axx + aay - 2xyy}{(yy - ax)^2}$$

seu $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6axxyy - 2x^4y - 2xy^4 - 2a^3xy}{(yy - ax)^3}$

$$= -\frac{2a^3xy}{(yy - ax)^3}$$

cum

cum ex aequatione finita sit $2x^4y + 2xy^4 = 6axxyy$: hocque modo ope aequationis finitae hi valores in innumeras formas transmutari possunt.

286. Aequatio etiam differentialis prima infinitis modis potest variari, dum cum aequatione finita permiscetur. Sic cum exemplo praecedente inventa esset aequatio differentialis

$$yydy + xxdx = axdy + aydx,$$

si ea multiplicetur per y, orietur

$$y^3dy + xxydx = axydy + ayydx,$$

in qua si loco y^3 substituatur eius valor $3axy - x^3$ orietur haec aequatio nova

$$2axydy - x^3dy + xxydx = ayydx;$$

quae denuo per y multiplicata, postquam loco y^3 eius valor fuerit substitutus, praebebit

$$2axy^2dy - x^3ydy + xxyydx = 3aaxydx - ax^3dx.$$

Generaliter autem si P, Q, R denotent functiones quascunque ipsarum x & y, si aequatio differentialis multiplicetur per P, erit

$$Pyydy + Pxxdx = aPxdy + aPydx.$$

Tum cum sit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ erit quoque

$$(x^3 + y^3 - 3axy)(Qdx + Rdy) = 0,$$

quae aequationes invicem additae dabunt aequationem differentialem generalem ex proposita aequatione finita natam

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy +$$
$$Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0.$$

287. Possunt vero etiam per ipsam differentiationem infinitae aequationes differentiales ex eadem aequatione finita inveniri, dum ea, antequam differentietur, per quantitatem quamcunque aut multiplicatur aut dividitur. Sic si P fuerit functio quaecunque ipsarum x & y, ut sit $dP = pdx + qdy$, si aequatio finita per P multiplicetur, atque tum demum differentietur, obtinebitur aequatio differentialis generalis, quae infinitas formas diversas induet, prouti pro P aliae atque aliae

fun-

functiones assumuntur. Tum vero multiplicitas adhuc in infinitum augebitur, si ad hanc aequationem differentialem inventam addatur ipsa aequatio finita per huiusmodi formulam $Qdx + Rdy$ multiplicata, ubi pro Q & R functiones quascunque ipsarum x & y assumere licet. Quanquam autem in his omnibus aequationibus relatio inter dy & dx, quam differentiale functionis y aequatione finita per x determinatae ad dx tenet, comprehenditur; tamen plerumque multo latius patent, & differentiale ipsius y per alias aequationes finitas determinati exprimit; cuius rei ratio in calculo integrali potissimum explicabitur.

288. Non solum autem ex eadem aequatione finita innumerabiles aequationes differentiales deduci possunt, sed etiam plures imo infinitae exhiberi possunt aequationes finitae, quae ad easdem aequationes differentiales deducantur. Sic hae duae aequationes $yy = ax + ab$ & $yy = ax$ omnino sunt diversae, dum in priori quaecunque quantitas constans in locum ipsius b collocatur. Interim tamen hae ambae aequationes differentiatae eandem dant aequationem differentialem $2ydy = adx$; quin etiam omnes aequationes in hac forma $yy = ax$ contentae, quicunque valor ipsi a tribuatur, in una aequatione differentiali, in qua a non insit, comprehendi possunt. Dividatur enim aequatio illa per x ut sit $\frac{yy}{x} = a$, haecque differentiata dabit $2xdy - ydx = 0$. Possunt quoque aequationes transcendentes & algebraicae ad eandem aequationem differentialem perduci, uti fit in istis aequationibus

$$yy - ax = 0 \quad \& \quad yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}},$$

si enim utraque per $e^{\frac{x}{a}}$ dividatur, ut habeantur istae aequationes: $e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0$ & $e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb$, ex utriusque differentiatione orietur eadem differentialis

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

289. Ratio huius diverſitatis in hoc conſiſtit, quod quantitatis conſtantis differentiale ſit $= 0$. Quodſi ergo aequatio finita ad eiuſmodi formam reducatur, ut quantitas quaepiam conſtans ſola adſit, neque per variabiles vel multiplicetur vel dividatur; tum per differentiationem eruetur aequatio, in qua illa quantitas conſtans prorſus non adſit. Hoc modo quaelibet quantitas conſtans, quae in aequationem finitam ingreditur, per differentiationem tolli poteſt. Sic ſi propoſita fuerit aequatio $x^3 + y^3 = 3axy$; ſi ea per xy dividatur ut habeatur $\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$, haec aequatio differentiata dabit:

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

quam conſtans a amplius non ingreditur.

290. Si plures quantitates conſtantes, quae in aequatione finita inſunt, tolli debeant, id fiet per differentiationem bis pluriesve repetitam; ſicque tandem obtinebuntur aequationes differentiales altiorum graduum iis conſtantibus prorſus carentes. Sit propoſita haec aequatio $yy = maa - nxx$, ex qua per differentiationem conſtantes maa & n tolli debeant. Prima quidem tolletur prima differentiatione, unde fit $ydy + nxdx = 0$, hinc porro formetur aequatio $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, quae ſumto dx conſtante, per differentiationem dabit:

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0,$$

quae etſi nullam conſtantem complectitur, tamen omnes aequationes in hac forma $yy = maa - nxx$ contentas, quicunque valores litteris m, n & aa tribuantur, in ſe aeque comprehendit.

291. Non ſolum vero quantitates conſtantes, quae in aequationem finitam ingrediuntur, per differentiationem tolli poſſunt, ſed etiam altera variabilis, eius ſcilicet, cuius differentiale conſtans aſſumitur, per differentiationem eliminari po-

poterit. Ex aequatione enim inter x & y propoſita quaeratur valor x, ut ſit $x = Y$ denotante Y functionem ipſius y; eritque $dx = dY$, & ſumto dx conſtante, fiet differentiando $0 = ddY$. Sin autem fuerit $xx + ax + b = Y$, fiet ter differentiando $0 = d^3 Y$, & aequatio $x^3 + axx + bx + c = Y$ quater differentiata dat $0 = d^4 Y$. Quanquam autem in his aequationibus una tantum variabilis ineſſe videtur, quae propterea variabilis eſſe ceſſaret, dum unica variabilis in nulla aequatione adeſſe poteſt; tamen quia differentiale dx conſtans eſt aſſumtum, eiuſque ratio in aequatione haberi debet, revera in aequationem ingredi cenſendum eſt. Hinc mirandum non eſt, ſi ſaepius aequationes differentiales ſecundi altiorisve gradus occurrant, in quibus unica tantum variabilis ineſſe videatur.

292. Praecipue autem notandum eſt, per differentiationem quantitates irrationales ac tranſcendentes ex aequatione tolli poſſe. Quod quidem ad irrationales attinet, quoniam per reductiones cognitas irrationalitas eliminari poteſt, hoc facto, per differentiationem aequatio obtinetur ab irrationalitate libera. Verum hoc ſaepenumero commodius ſine iſta reductione fieri poteſt, dum per comparationem aequationis differentialis cum finita formula irrationalis, ſi una tantum inſit, eliminari poteſt. Sin autem duae pluresve partes irrationales in aequatione finita contineantur, tum eius aequatio differentialis denuo differentietur, ſicque aequationes differentiales altiorum graduum tot quaerantur, quot requiruntur ad ſingulas partes irrationales eliminandas. Hoc modo etiam exponentes indefiniti pariter atque fracti tolli poterunt. Uti ſi fuerit $y^m = (aa - xx)^n$, poſt differentiationem habebitur

$$my^{m-1} dy = -2n(aa - xx)^{n-1} x dx,$$

quae per finitam diviſa dat $\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa - xx}$, in qua nullus amplius exponens indefinitus occurrit. Hinc ergo patet aequationem differentialem ab omni irrationalitate liberam

 or-

ortam esse posse ex aequatione finita irrationali, atque adeo quantitates transcendentes involvente.

293. Ut autem intelligatur, quomodo per differentiationem quantitates transcendentes eliminentur, incipiamus a logarithmis, quorum differentialia cum sint algebraica, negotium sine difficultate absolvetur. Sit enim $y = xlx$: erit $\frac{y}{x} = lx$, unde differentiando fit $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}$, ideoque $xdy - ydx = xdx$. Si bini insint logarithmi duplici differentiatione erit opus: sit enim $ylx = xly$; erit $\frac{ylx}{x} = ly$, & differentiando, $\frac{xdylx + ydx - ydxlx}{xx} = \frac{dy}{y}$, ex qua concluditur fore $lx = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - yydx}$. Haec aequatio iam iterum differentietur posito dx constante, atque prodibit

$$\frac{dx}{x} = \frac{xxddy + 2xdxdy - 2ydxdy}{yxdy - yydx}$$

$$+ \frac{(yydx - xxdy)(yxddy + xdy^2 - ydxdy)}{(yxdy - yydx)^2} \text{ seu } \frac{dx}{x} =$$

$$\frac{y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - y^2xdxdy^2 + y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3}{(yxdy - yydx)^2}$$

quae reducta dabit:

$$y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - 2xyydxdy^2$$
$$+ 3y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 - \frac{y^4dx^3}{x} = 0$$

seu $$yyxx(y - x)dxddy + 3yxdxdy(xxdy + yydx)$$
$$- 2yyxxdxdy(dx + dy) = x^4dy^3 + y^4dx^3.$$

194. Quantitates exponentiales ex aequatione eodem modo, quo logarithmi per differentiationem tolluntur. Si enim huiusmodi proposita fuerit $P = e^Q$, ubi P & Q functio-

ctiones quascunque ipsarum x & y denotent; ea aequatio transmutari poterit in hanc logarithmicam $lP = Q$; cuius differentialis est $\frac{dP}{P} = dQ$ seu $dP = PdQ$. Neque obstat, si quantitates exponentiales magis fuerint complicatae, tum enim si una differentiatio non sufficit, duabus pluribusve negotium absolvetur.

I. Sit $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; multiplicetur huius fractionis numerator ac denominator per e^x eritque $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ unde fit

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \& \quad 2x = l\frac{y+1}{y-1},$$

cuius differentiale est $dx = -\frac{dy}{yy-1} = \frac{dy}{1-yy}$.

II. Sit $y = l\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, fiet per primam differentiationem $dy = \frac{(e^x - e^{-x})dx}{e^x + e^{-x}}$, seu $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, atque

$$e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}. \quad \text{Ergo} \quad 2x = l\frac{dy + dx}{dx - dy}.$$

Sumto ergo dx constante erit

$$dx = \frac{dxddy}{dx^2 - dy^2} \quad \text{seu} \quad dx^2 = ddy + dy^2.$$

295. Simili modo quantitates transcendentes a circulo pendentes ex aequatione ope differentiationis tollentur, uti ex his exemplis intelligetur.

I. Sit $y = aA\sin\frac{x}{a}$; erit $dy = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

II. Sit $y = a\cos\frac{y}{x}$; erit $\frac{y}{a} = \cos\frac{y}{x}$, &c.

$\frac{dy}{a} = -\frac{xdy + ydx}{xx}$ fin $\frac{y}{x}$. At cum fit

$$\text{cof}\,\frac{y}{x} = \frac{y}{a};\ \text{erit fin}\,\frac{y}{x} = \frac{\surd(aa - yy)}{a};$$

quo valore fubftituto habebitur

$$\frac{dy}{a} = \frac{(ydx - xdy)\surd(aa - yy)}{axx}$$

feu $xxdy = (ydx - xdy)\surd(aa - yy)$

III. Sit $y = m$ fin $x + n$ cof x, erit poft differentiationem primam $dy = mdx$ cof $x - ndx$ fin x: quae denuo differentiata pofito dx conftante dabit

$$ddy = -mdx^2 \text{fin}\,x - ndx^2 \text{cof}\,x,$$

haec autem per primam divifa dat

$$\frac{ddy}{y} = -dx^2 \quad \text{feu} \quad ddy + ydx^2 = 0,$$

ex qua non folum finus & cofinus, fed etiam conftantes m & n evanuerunt.

IV. Sit $y =$ fin lx; erit A fin $y = lx$, unde per differentiationem fit $\frac{dy}{\surd(1 - yy)} = \frac{dx}{x}$; quae fumtis quadratis dat $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$, haecque pofito dx conftante ulterius differentiata praebet,

$$2xxdyddy + 2xdxdy^2 = -2ydx^2dy$$

feu $xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0$.

V. Sit $y = ae^{mx}$ fin nx, erit differentiando

$$dy = mae^{mx}dx\,\text{fin}\,nx + nae^{mx}dx\,\text{cof}\,nx,$$

quae per propofitam divifa dat

$$\frac{dy}{y} = mdx + \frac{ndx\,\text{cof}\,nx}{\text{fin}\,nx} = mdx + ndx\,\text{cot}\,nx.$$

Erit ergo A cot $\left(\frac{dy}{nydx} - \frac{m}{n}\right) = nx$. Quae aequatio pofito dx conftante differentiata dat:

ndx

$$ndx = \frac{ndxdy^2 - nydxddy}{mmyydx^2 + nnyydx^2 - 2mydxdy}$$

seu $(mm + nn)yydx^2 - 2mydxdy = dy^2 - yddy$.
Perspicuum igitur est, etiamsi in aequatione differentiali nullae quantitates transcendentes insint, eam tamen ex aequatione finita oriri potuisse, quae a quantitatibus transcendentibus utcunque sit affecta.

296. Quoniam igitur aequationes differentiales sive primi sive altioris gradus, quae duas variabiles x & y continent, ex aequationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variabiles exprimitur. Proposita scilicet aequatione differentiali quacunque binas variabiles x & y complectente, ea significatur certa quaedam relatio inter x & y, qua y fit functio quaedam ipsius x. Hinc natura aequationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari poterit, quae per aequationem illam indicatur; seu quae sit ita comparata, ut si ea ubique loco y, eiusque differentiale loco dy, atque eius altiora differentialia loco ddy, d^3y, &c. substituantur, aequatio resultet identica. In huius autem functionis investigatione versatur calculus integralis, cuius finis eo tendit, ut proposita aequatione differentiali quacunque, functio illa ipsius x, cui altera variabilis y est aequalis, definiatur; seu quod eodem redit, ut aequatio finita inveniatur, qua relatio inter x & y contineatur.

297. Si exempli gratia proponatur aequatio haec

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0$$

ad quam supra §. 288 pervenimus, eiusmodi relatio inter x & y ea definitur, quae simul hac aequatione finita

$yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}}$ continetur. Cum igitur hinc sit

$$yy = ax + bbe^{\frac{x}{a}}, \text{ patet } \sqrt{(ax + bbe^{\frac{x}{a}})} = y$$

eam

eam esse functionem ipsius x, cui variabilis y vi propositae aequationis differentialis sit aequalis. Namque si in aequatione loco yy, hunc valorem $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ & loco $2ydy$ eius differentiale $adx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx$ substituamus, orietur aequatio identica:

$$adx + \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx - adx - xdx - \frac{bb}{a} e^{\frac{x}{a}} dx + xdx = 0.$$

Sicque patet omnem aequationem differentialem aeque ac finitam certam relationem inter variabiles x & y exhibere, quae autem sine subsidio calculi integralis reperiri nequeat.

298. Quo haec facilius intelligantur, ponamus cognitam esse eam functionem ipsius x, quae ipsi y vi cuiuscunque aequationis differentialis sive primi sive altioris gradus, conveniat; sitque

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ \&c.$$

atque si in aequatione differentiale dx assumtum sit constans, erit $ddy = qdx^2$, $d^3y = rdx^3$, &c. qui valores postquam in aequatione erunt substituti, ob omnes eius terminos homogeneos, differentialia dx per divisionem evanescent, orieturque aequatio finitas tantum quantitates x, y, p, q, r, &c. complectens. Cum igitur sint p, q, r, &c. quantitates a natura functionis y pendentes, aequatio revera tantum inter duas variabiles x & y subsistet; sicque vicissim constat, omni aequatione differentiali certam quandam relationem inter variabiles x & y determinari. Quamobrem si in solutione cuiusvis problematis ad aequationem differentialem inter x & y perveniatur, per eam aeque relatio inter x & y exprimi censenda est, ac si ad aequationem finitam esset perventum.

299. Hoc igitur modo aequatio quaevis differentialis ita ad formam finitam reduci potest, ut in ea nonnisi quanti-

tates

tates finitae contineantur, differentialia autem seu infinite parva prorsus excedant. Cum enim sit y certa functio ipsius x, si ponatur

$$dy = pdx; \; dp = qdx; \; dq = rdx; \; \&c.$$

quodcunque differentiale fuerit constans acceptum, differentialia secunda & altiora per potestates ipsius dx exprimentur, quae deinceps per divisionem penitus tollentur. Ut si proponeretur haec aequatio

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0$$

in qua dx ponitur constans; facto

$$dy = pdx, \; dp = qdx, \; \& \; dq = rdx,$$

ea abibit in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

postquam scilicet tota aequatio per dx^3 est divisa. Haecque aequatio finita relationem inter x & y determinat.

300. Omnes ergo aequationes differentiales, cuiuscunque sint ordinis, his substitutionibus

$$dy = pdx; \; dp = qdx; \; dq = rdx; \; \&c.$$

ad meras quantitates finitas reducuntur. Atque si aequatio differentialis fuerit primi ordinis, ita ut differentialia prima eam tantum ingrediantur, per istam reductionem praeter variabiles y & x insuper quantitas p introducetur. Sin autem aequatio differentialis fuerit secundi ordinis continens differentialia secunda, praeterea quantitas q; ac, si fuerit differentialis tertii ordinis, introducetur insuper quantitas r, sicque porro. Quoniam igitur hoc modo differentialia prorsus ex calculo exterminantur, ratio illa differentialis constantis penitus cessat; neque amplius, etiamsi insint quantitates q, r, ex differentialibus secundis oriundae, opus erit indicare, an quodpiam differentiale constans sit assumtum. Perinde enim est, utrum in evolutione aliquod differentiale pro lubitu constans statuatur, an nullum.

301. Si igitur aequatio differentialis secundi vel altioris gradus proponatur, in qua nullum differentiale primum

constans esse assumtum perhibetur, hoc modo statim explorari poterit, utrum ea determinatam relationem inter variabiles x & y contineat, nec ne. Quia enim nullum differentiale constans assumitur, in arbitrio nostro relinquitur, quodnam differentiale constans ponere velimus; hincque tantum erit dispiciendum, utrum diversis differentialibus constantibus positis aequatio eandem relationem inter x & y exhibeat. Quodsi non eveniat, certum est signum, aequationem nullam determinatam relationem exprimere, ideoque in solutione nullius problematis locum habere posse. Tutissimus autem modus simulque facillimus hoc explorandi erit is ipse, quem supra in simili negotio pro expressionibus differentialibus altiorum ordinum, num fixos habeant significatus, dignoscendis tradidimus.

302. Proposita ergo huiusmodi aequatione differentiali secundi altiorisve ordinis, in qua nullum differentiale constans sit positum, statuatur differentiale dx constans; deinde haec aequatio, uti supra de expressionibus differentialibus ostendimus, iterum reducatur ad eiusmodi formam, quae nullum differentiale constans supponat, statuendo scilicet

$$ddy - \frac{dyddx}{dx} \text{ loco } ddy;$$

$$\& \quad d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} \text{ loco } d^3y,$$

&c.

Quo facto dispiciatur, utrum aequatio hoc modo resultans conveniat cum aequatione proposita; quod si eveniat, aequatio proposita determinatam relationem inter x & y complectetur; sin autem secus accidat, aequatio erit vaga, neque definitam rationem inter variabiles x & y exprimet: quemadmodum hoc iam ante fusius est demonstratum.

303. Sit, quo hoc plenius explicetur, haec aequatio proposita, quae nullo differentiali constante posito reperta esse perhibeatur.

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ponatur dx constans, atque ea transibit in hanc:

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Ex hac nunc iterum consideratio differentialis constantis exuatur, modo ante praescripto, & obtinebitur:

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

quae, quoniam a proposita tantum ratione primi termini discrepat, videndum est, utrum sit $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Quod si deprehendatur, aequatio proposita fixam relationem inter x & y exhibebit, quae per regulas in calculo integrali tradendas reperietur, quodcunque differentiale primum constans accipiatur. At, si fieri nequeat $P = -\frac{Qdy}{dx}$, aequatio proposita erit impossibilis.

304. Nisi igitur haec proposita aequatio:

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

sit absurda, necesse est ut sit $Pdx + Qdy = 0$, quod duplici modo evenire potest: vel enim actu erit

$$P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ seu aequatio } Pdx + Qdy = 0$$

identica; vel erit $Pdx + Qdy = 0$ ipsa illa aequatio differentialis primi gradus, ex cuius differentiatione proposita est orta: quo posteriore casu aequatio $Pdx + Qdy = 0$ congruet cum proposita, eandemque relationem inter x & y continebit, sicque sine auxilio calculi integralis haec relatio erui poterit. Cum enim sit $Pdx + Qdy = 0$, erit differentiando

$$Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

quae ab aequatione proposita subtracta relinquet:

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

Cum autem sit $dy = -\frac{Pdx}{Q}$, differentialia prorsus extingui poterunt, nasceturque aequatio finita inter x & y earum relationem indicans.

305. Ponamus in solutione problematis nullo differentiali constante assumto perventum esse ad hanc aequationem:

$$x^3 ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Erit ergo, cum aequationem absurdum non continere constet: $x^3 dx + xxydy = 0$, seu $xdx + ydy = 0$: cuius differentiale erit

$$x^3 ddx + xxyddy + 3xxdx^2 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0$$

quae aequatio a proposita subtracta relinquit:

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0, \quad \text{seu}$$

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Cum autem sit

$$xdx + ydy = 0; \text{ erit } 2xydy = -2xxdx;$$

ideoque

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \text{ seu } yy + xx = aa;$$

quae aequatio veram relationem inter x & y exprimit, siquidem ea consentit cum differentiali primum inventa $xdx + ydy = 0$. Qui consensus, nisi se manifestasset, aequatio proposita pro impossibili esset habenda; cum autem hoc casu locum habuerit, aequationem finitam $xx + yy = aa$ sine calculo integrali elicere licuit.

306. Ut vero etiam exemplum aequationis impossibilis afferamus, proposita sit haec aequatio:

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in qua nullum differentiale constans sit assumtum. Foret ergo $yydx - xxdy = 0$, ideoque differentiando

$$yyddx - xxddy + 2ydxdy - 2xdxdy = 0,$$

quae propositae aequalis posita dabit:

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy.$$

Cum

Cum vero sit $dy = \frac{yydx}{xx}$, extinguendis differentialibus obtinebitur: $y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x}$ seu

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy,$$

quae utrum cum differentiali $yydx - xxdy = 0$ consentiat, eam differentiando, facile patebit, fiet enim:

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

$$\text{seu } \frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax + 4xy - 2xx},$$

$$\text{at ex illa est } \frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}, \text{ foretque ergo}$$

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

$$\text{seu } axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y}$$

$$= 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Verum ex aequatione finita primum inventa est

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

quae ab ista subtracta relinquit:

$0 = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$, quae resolvitur in has:

$$0 = y - x; \quad \& \quad 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Quarum illa $y = x$ quidem cum differentiali $dy = \frac{yydx}{xx}$ constare potest, at vero aequationi finitae primum inventae adversatur, nisi statuatur $a = 0$, vel nisi utraque variabilis x & y constans statuatur, quo quidem casu ob $dx = 0$ & $dy = 0$ omnibus aequationibus differentialibus satisfit, aequatio proposita subsistere nequit.

307. Consideremus nunc etiam aequationes differentiales tres variabiles x, y, & z involventes, quae erunt vel primi, vel secundi, vel altioris gradus. Ad quarum naturam scrutandam no-

notari oportet, aequationem finitam tres variabiles complectentem determinare relationem, quam unaquaeque ad binas reliquas teneat; definitur ergo, qualis functio ſit z ipſarum x & y. Quemadmodum igitur aequatio huiuſmodi finita reſolvitur, ſi reperiatur qualis functio ipſarum x & y loco z ſubſtitui debeat, ut aequationi ſatisfiat, ita quoque aequatio differentialis tres variabiles complectens determinabit, qualis functio una ſit reliquarum; iſque huiuſmodi aequationem reſolviſſe cenſendus eſt, qui indicaverit eam binarum variabilium x & y functionem, quae loco tertiae z ſubſtituta aequationi ſatisfaciat, ſeu eam identicam reddat. Aequatio ergo differentialis reſolvitur, ſi vel functio ipſarum x & y valorem ipſius z exhibens definiatur, vel aequatio finita aſſignetur, qua idem debitus ipſius z valor exprimatur.

308. Quanquam autem omnis aequatio differentialis duas tantum variabiles complectens, ſemper determinatam relationem inter eas exprimit; tamen hoc non ſemper evenit in aequationibus differentialibus trium variabilium. Dantur enim eiuſmodi aequationes, quibus plane nullo modo ſatisfieri poterit, quaecunque functio ipſarum x & y in locum ipſius z ſubſtituatur. Uti ſi propoſita fuerit haec aequatio $zdy = ydx$ facile patet, nullam prorſus dari functionem ipſarum x & y, quae loco z ſubſtituta reddat $zdy = ydx$, differentialia enim dx & dy nullo modo extinguentur. Simili modo apparet nullam dari functionem ipſarum x & z, quae loco y ſubſtituta eidem aequationi ſatisfaciat. Quaecunque enim pro y concipiatur functio ipſarum x & z, in eius differentiali dy ineſt dz, quod quia in aequatione non ineſt, deſtrui non poterit. Hancobrem nulla aequatio finita inter x, y, & z dari poteſt, quae aequationi differentiali $zdy = ydx$ conveniat.

309. Hinc aequationes differentiales tres variabiles continentes diſtribui oportet in imaginarias & reales. Huiuſmodi autem aequatio erit imaginaria ſeu abſurda, cui per nullam

aequa-

aequationem finitam satisfieri potest, cuiusmodi erat illa $zdy = ydx$, quam modo consideravimus. Aequatio autem erit realis, cui aequivalens aequatio finita exhiberi potest, quod evenit, si una variabilis aequalis sit certae cuipiam functioni binarum reliquarum. Cuiusmodi est haec aequatio:

$$zdy + ydz = xdz + zdx + xdy + ydx$$

congruit enim haec cum ista aequatione finita:

$$yz = xz + xy \quad \text{fitque} \quad z = \frac{xy}{y - x}.$$

Istud ergo discrimen inter huiusmodi aequationes imaginarias & reales diligentissime est observandum; praecipue in calculo integrali, quia ridiculum foret, cuiuspiam aequationis differentialis velle integralem, hoc est aequationem finitam satisfacientem quaerere, quae plane nullam habeat.

310. Primum igitur patet, omnes aequationes differentiales trium variabilium, in quibus tantum binarum differentialia occurrant, esse imaginarias & absurdas. Ponamus enim in aequatione, quae contineat variabilem z, tantum inesse differentialia dx & dy, differentiale autem dz prorsus abesse; atque manifestum erit nullam exhiberi posse functionem ipsarum x & y, quae loco z substituta aequationem identicam producat; differentialia enim dx & dy nullo modo tolentur. His ergo casibus omnino nulla datur aequatio finita satisfaciens: nisi forte eiusmodi relatio inter x & y assignari queat, quae quicquid sit z subsistere possit, uti fit in hac aequatione:

$$zdy - zdx = ydy - xdx,$$

cui satisfacit aequatio $y = x$. Facile autem investigatur, quibus casibus hoc eveniat, quaerendo relationem inter x & y primo si $z = 0$, & tum an ista relatio aequationi pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

311. Neque vero solum aequatio tres variabiles involvens est absurda, si duo tantum continet differentialia, sed etiam si in ea omnia tria differentialia occurrant, talis esse

po-

poterit. Quos casus ut evolvamus, ponamus P & Q esse functiones ipsarum x & y tantum, atque haberi hanc aequationem

$$dz = Pdx + Qdy,$$

quae si non est absurda, erit z functio quaepiam ipsarum x & y, cuius differentiale sit

$$dz = pdx + qdy, \quad \text{eritque} \quad P = p \quad \& \quad Q = q.$$

At supra demonstravimus $pdx + qdy$ non esse posse differentiale cuiusquam functionis ipsarum x & y, nisi sit $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, denotante, uti ante assumsimus $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ differentiale ipsius p posita sola y variabili, per dy divisum, atque $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ differentiale ipsius q, posita sola x variabili, divisum per dx. Quocirca aequatio $dz = Pdx + Qdy$ realis esse nequit, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

312. Similis omnino erit ratio huius aequationis

$$dZ = Pdx + Qdy$$

si Z denotet functionem quamcunque ipsius z, P vero & Q sint functiones ipsarum x & y, tertiam variabilem z non complectentes. Ut enim Z aequalis fieri possit functioni ipsarum x & y, necesse est ut sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ex hoc ergo criterio aequatio differentialis quaeque proposita, quae quidem in hac forma generali contineatur, diiudicari potest, utrum sit realis an absurda. Sic patebit hanc aequationem $zdz = ydx + xdy$ esse realem, nam ob

$$P = y \quad \& \quad Q = x, \quad \text{fit} \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1.$$

Haec vero aequatio $azdz = yydx + xxdy$ est absurda, fit

fit enim $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y$ & $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x$; qui valores sunt inaequales.

313. Ut autem criterium latissime patens investigemus, sint P, Q, & R functiones quaecunque ipsarum x, y, & z; atque omnis aequatio differentialis trium variabilium, siquidem sit primi gradus, continebitur in hac forma:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Quoties ergo haec aequatio est realis, z aequabitur functioni cuipiam ipsarum x & y; eiusque adeo differentiale erit huius formae $dz = pdx + qdy$. Quare si in aequatione proposita ista functio ipsarum x & y loco z, & $pdx + qdy$ loco dz substituatur, necesse est, ut prodeat aequatio identica $0 = 0$. Atque cum ex aequatione proposita fiat: $dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R}$, si in P, Q, & R valor ille loco z substituatur, necesse est ut fiat $p = -\frac{P}{R}$, & $q = -\frac{Q}{R}$.

314. Quoniam vero est $dz = pdx + qdy$, erit per ante demonstrata $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Cum igitur substituto loco z ipsius valore in x & y fit

$$p = -\frac{P}{R} \quad \& \quad q = -\frac{Q}{R},$$

erit $$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(-\frac{RdP + PdR}{RRdy}\right)$$

& $$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(-\frac{RdQ + QdR}{RRdx}\right)$$

ideoque habebitur per RR multiplicando haec aequatio:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right);$$

ubi denominatores dy & dx iterum indicant, in differentialibus numeratorum eam solam quantitatem variabilem assumi debere, cuius differentiale denominatorem constituit. Haec autem differentialia dP, dQ, dR ante cognosci non possunt, quam in ipsis quantitatibus P, Q, & R valor debitus loco z fuerit substitutus, qui autem cum sit incognitus, sequenti modo erit procedendum.

315. Quia P, Q, & R sunt functiones ipsarum x, y, & z, ponamus

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$dQ = \delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz$$
$$dR = \eta dx + \theta dy + \iota dz$$

ubi α, β, γ, δ, ε, &c. denotant eas functiones, quae ex differentiatione oriuntur. Concipiamus nunc loco z ubique eius valorem in x & y expressum substitui, & loco dz, ponamus valorem $pdx + qdy$; fietque

$$dP = (\alpha + \gamma p)dx + (\beta + \gamma q)dy$$
$$dQ = (\delta + \zeta p)dx + (\varepsilon + \zeta q)dy$$
$$dR = (\eta + \iota p)dx + (\theta + \iota q)dy.$$

Ex his ergo valoribus erit:

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \theta + \iota q \quad ; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta + \gamma q \quad ; \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p.$$

316. Cum igitur ad realitatem aequationis requiratur, ut sit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

fiet si inventi valores substituantur:

$$P(\theta + \iota q) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \iota p) - R(\delta + \zeta p).$$

At ante invenimus esse $p = -\frac{P}{R}$ & $q = -\frac{Q}{R}$

qui

qui valores, cum differentialia non amplius in computum veniant, adhiberi poterunt, etiamsi loco z eius valor in x & y non substituatur. Eritque ergo

$$P\theta - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\zeta$$

seu $o = P(\zeta - \theta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta)$.
Quia autem quantitates β, δ, γ, η, ζ, θ, per differentiationem inveniuntur, erit superiori notandi modo adhibito:

$$o = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Quae proprietas, nisi in aequatione locum habeat, aequatio non erit realis, sed imaginaria & absurda.

317. Quanquam hanc regulam ex consideratione variabilis z elicuimus, tamen quia omnes quantitates aeque ingrediuntur, manifestum est, & reliquarum consideratione, eandem expressionem prodituram fuisse. Proposita ergo aequatione differentiali primi gradus, quae tres variabiles involvat, quacunque, statim diiudicari poterit utrum sit realis an imaginaria. Comparetur enim cum hac forma generali:

$$Pdx + Qdy + Rdz = o,$$

atque quaeratur valor huius formulae:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

qui si fuerit $= o$, aequatio erit realis, sin autem non fuerit $= o$, certum hoc est signum, aequationem esse imaginariam seu absurdam.

318. Aequatio proposita per divisionem quoque semper ad huiusmodi formam reduci potest:

$$Pdx + Qdy + dz = o,$$

in quam, cum prior abeat si fiat $R = 1$, criterium simplicius exprimetur, hoc modo:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = o.$$

Quoties enim haec expressio revera nihilo aequalis reperitur, toties aequatio proposita erit realis; sin autem contrarium eveniat, aequatio erit imaginaria. Posterius quidem ex iis, quae demonstravimus, est certum; de priori autem adhuc dubitari possit, utrum aequatio semper sit realis, quoties quidem hoc criterium id indicat. Quod cum hoc loco plenissime demonstrari nequeat, sed in calculo demum integrali demonstratione confirmari possit, hic tantum id affirmamus; neque autem periculum inde est metuendum, si quis tantisper de eius veritate dubitare voluerit.

319. Ex hoc ergo criterio primum patet, si in aequatione

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

fuerit P functio ipsius x, Q functio ipsius y, & R functio ipsius z tantum, aequationem semper fore realem.

Fit enim

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \;;$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \;\&\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0 \;;$$

ideoque tota expressio criterii sponte evanescet.

320. Si fuerit ut ante P ipsius x, & Q ipsius y functio tantum, R autem functio quaecunque ipsarum x, y, & z, aequatio erit realis si fuerit:

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ seu } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q$$

Sic si proposita fuerit haec aequatio:

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0.$$

Quia hic est $P = \frac{2}{x}$; $Q = \frac{3}{y}$, & $R = \frac{x^2y^3}{z^6}$

hinc

hinc $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6}$; atque $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxyy}{z^6}$;

erit $P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$; ideoque aequatio proposita erit realis.

321. Si fuerint P & Q functiones ipsarum x & y, at R functio ipsius z tantum, ob

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0;\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0;\ \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0;\ \&\ \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

aequatio erit realis si fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Haec eadem vero conditio requiritur, si $Pdx + Qdy$ debeat esse differentiale determinatum, seu ex differentiatione cuiuspiam functionis finitae ipsarum x & y ortum. Hucque redit quod supra §. 312 iam observavimus, aequationem $dZ = Pdx + Qdy$, si Z sit functio ipsius z tantum at P & Q functiones ipsarum x & y, realem esse non posse, nisi sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ambo autem isti casus inter se prorsus conveniunt: nam loco Rdz, si R est functio ipsius z tantum, poni potest dZ existente Z functione ipsius z.

322. Ut hoc criterium inventum exemplo illustremus, consideremus hanc aequationem:

$$(6xy^2z - 5yz^3)\,dx + (5x^2yz - 4xz^3)\,dy + (4x^2y^2 - 6xyz^2)\,dz = 0;$$

quae cum forma generali comparata fit:

$$P = 6xy^2z - 5yz^3;\quad \left(\frac{dP}{dy}\right) = 12xyz - 5z^3;$$

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 6xy^2 - 15yz^2;$$

$$Q = 5x^2yz - 4xz^3;\quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 10xyz - 4z^3;$$

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = 5x^2y - 12xz^2;$$

$$R = 4x^2y^2 - 6xyz^2; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 8xy^2 - 6yz^2;$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = 8x^2y - 6xz^2.$$

His inventis valoribus aequatio iudicium continens erit haec:

$$+(6xy^4z - 5yz^3)(-3xxy - 6xzz)$$
$$+(5x^2yz - 4xz^3)(2xyy + 9yzz)$$
$$+(4x^2y^2 - 6xyz^2)(2xyz - z^3) = 0.$$

Haec autem expressio si evolvatur, omnes termini actu se mutuo destruunt, fitque $0 = 0$, quod indicat aequationem propositam esse realem.

323. Quando autem expressio hoc modo ex criterio eruta non evanescit, tum id signum est aequationem propositam esse imaginariam. Quoniam vero hoc pacto ex criterio aequatio finita invenitur, ea, si quidem aequationi differentiali conveniat, simul relationem indicabit, quam variabiles inter se tenent. Atque hoc modo ii casus, quorum supra meminimus (310), evolvuntur. Sit enim proposita ista aequatio:

$$(z - x)\,dx + (y - z)\,dy = 0,$$

fiet $P = z - x$; $Q = y - z$; & $R = 0$,

porro $\left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$, & $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = -1$.

Aequatio iudicium exhibens fit $P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$

seu $z - x = z - y$; unde fit $y = x$.

Quoniam igitur hic casu evenit, ut aequatio $y = x$ simul aequationi differentiali satisfaciat, dicendum est propositam aequationem nil aliud significare, nisi esse $y = x$.

324. Proposita ergo aequatione differentiali tres variabiles continente: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, tres considerandi erunt casus sequentes, ad quos haec aequatio deducit:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Primus est si haec expressio revera sit $= 0$, tumque aequatio proposita erit realis. Sin autem haec aequatio finita non sit identica, tum dispiciendum est, utrum ea aequationi propositae satisfaciat: quodsi evenit, habebitur aequatio finita, qui est casus secundus. Tertius autem casus locum habet, si aequatio finita cum proposita differentiali subsistere nequeat, atque tum aequatio proposita erit imaginaria: neque enim ulla aequatio finita exhiberi poterit, quae ipsi satisfaciat.

325. Casus primus ac tertius per se sunt perspicui, secundus autem, etsi rarissime occurrit, probe tamen notari meretur: & cum eius exemplum iam supra in aequatione, quae duo tantum continet differentialia, exhibuerimus, etiam aequationem afferamus, in qua omnia tria differentialia insint: $(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0$. Erit ergo:

$$P = z - y \;;\; \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dR}{dy}\right) = 1$$

$$Q = x \;;\; \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \;;\; \left(\frac{dP}{dz}\right) = 1$$

$$R = y - z \;;\; \left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \;;\; \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1$$

unde aequatio finita criterium continens evadet:

$$z - x - y = 0, \text{ seu } z = x + y$$

substituatur hic valor pro z in aequatione differentiali fietque

$$xdx + xdy - x(dx + dy) = 0;$$

quae aequatio, cum sit identica, sequitur aequationem differentialem nil aliud significare, nisi $z = x + y$.

326. Quoniam diximus omnes aequationes differentiales primi ordinis, in quibus tres variabiles insunt contineri in hac forma $Pdx + Qdy + Rdz = 0$,

dubium hic nasci poterit circa eas aequationes, in quibus differentialia prima duas pluresve dimensiones constituunt, cuiusmodi est haec:

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz.$$

Verum de huiusmodi aequationibus notandum est, eas nullo modo reales esse posse, nisi habeant divisores prioris formae, qui propterea aequationes simplices constituent. Cum enim ex hac aequatione fiat: $dz =$

$$\frac{Tdx + Vdy \pm \surd(dx^2(T^2 - PR) + 2dxdy(TV + RS) + dy^2(V^2 - QR))}{R}$$

facile patet z functioni cuipiam ipsarum x & y, seu dz huiusmodi expressioni $pdx + qdy$ aequale fieri non posse, nisi quantitas irrationalis evadat rationalis, quod eveniet si fuerit:

$$(T^2 - PR)(V^2 - QR) = (TV + RS)^2$$

seu

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}$$

Nisi ergo haec aequatio finita ipsi aequationi propositae satisfaciat, haec erit imaginaria.

327. Superesset ut in hoc Capite quoque aequationes differentiales altiorum ordinum, quae tres variabiles complectuntur, perpenderemus, casusque definiremus, quibus eae vel reales vel imaginariae evadunt; verum quia criteria nimis fierent intricata, hunc laborem hic praetermittimus, praesertim, cum ex iisdem fontibus, quos hic aperuimus, sequantur. Ceterum si in calculo integrali his criteriis erit opus, tum ea facile erui poterunt. Ob eandem causam hic quoque aequationes, quae plures variabiles complectuntur, non contemplamur, cum fere nunquam occurrant, atque, si unquam occurrerent, ex principiis hic traditis sine negotio examinari possent. Quare his expositis Institutioni Calculi Differentialis hic finem imponimus progressuri ad insignes usus ostendendos, quos iste calculus cum in ipsa Analysi, tum in Geometria sublimiori affert.